

514
17-74

4

ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ

ТРИГОНОМЕТРИЯ

И

СОВРАНИЕ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ.

СОСТАВИЛЪ

С. Пуржевальскій,

преподаватель 3-го военного Александровскаго училища.

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ.



ИЗДАНИЕ КНИЖНАГО МАГАЗИНА
НАСЛЕДНИКОВЪ
БРАТЬЕВЪ САЛАЕВЫХЪ.



МОСКВА.

ТИПОГРАФИЯ Э. ЛЕССНЕРА И Ю. РОМАНЪ

Арбатъ, домъ Каряжской.

1884.



ОТЪ ПЕЧАТНИКА

2835

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Предлагаемое новое издание тригонометрии отличается отъ предыдущаго главнымъ образомъ числомъ задачъ и ихъ расположеніемъ; здѣсь предложено 1491 задача, которыя помѣщены въ концѣ книги, и при томъ такъ, что каждому теоретическому отдѣлу имѣется соответствующій отдѣлъ задачъ. Въ отдѣлахъ VI и IX, т. е. на логарифмическія вычисленія численныхъ примѣровъ и рѣшенія треугольниковъ, даны примѣры на семизначные и пятизначные логарифмы; при чемъ самыя вычисленія произведены по семизначнымъ таблицамъ логарифмовъ Вега, обработанных Бремке-ромъ, и пятизначнымъ таблицамъ логарифмовъ, изд. мною.

При составленіи этого курса я пользовался слѣд. руководствами: *J. Todhunter* — Plane Trigonometry; *R. D. Beasley* — Plane Trigonometry; *J. C. Snowball* — The elements of plane and spherical Trigonometrie; *Colenso's* — Plane Trigonometry; *J. A. Serret* — Traité de Trigonométrie; *A. Desboves* — Questions de Trigonométrie rectiligne; *Dr. F. Reidt* — Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie и *Мейера* — Низшій курсъ Геодезіи, изъ которой заимствованы чертежи для X отдѣла.

Е. Пржевальскій.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

	<i>Стр.</i>
Введеніе. Первоначальныя понятія объ измѣреніи линий и угловъ	1
Отдѣлъ I. Тригонометрическія величины. Измѣненіе тригонометрическихъ величинъ съ измѣненіемъ угла. Отношенія между тригонометрическими величинами.	10
Отдѣлъ II. Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ для угловъ: $90^\circ - \alpha$, $90^\circ + \alpha$, $180^\circ - \alpha$, $180^\circ + \alpha$ и т. д.	28
Отдѣлъ III. Тригонометрическія величины сумм и разности угловъ; кратныхъ и дробныхъ угловъ.	34
Отдѣлъ IV. Нахожденіе тригонометрическихъ величинъ	52
Отдѣлъ V. Вычисленіе логарифмовъ тригонометрическихъ величинъ	62
Отдѣлъ VI. Расположеніе и употребленіе логарифмовъ тригонометрическихъ величинъ	67
Отдѣлъ VII. Приведеніе формулъ къ виду, удобному для логарифмическихъ вычисленій.	88
Отдѣлъ VIII. Соотношенія между сторонами и тригоном. величинами угловъ треугольника	98
Отдѣлъ IX. Рѣшеніе треугольниковъ	104
Отдѣлъ X. Описаніе и употребленіе нѣкоторыхъ землемѣрныхъ инструментовъ. Приложеніе тригонометріи къ рѣшенію задачъ на мѣстности	118
Отдѣлъ XI. Опредѣленіе площадей фигуръ.	139
Отдѣлъ XII. Минимы выраженія. Разложеніе тригонометрическихъ величинъ въ ряды. Суммированіе тригонометрическихъ рядовъ	146
Отдѣлъ XIII. Круговыя функціи	158
Задачи на всѣ отдѣлы тригонометріи.	163
Рѣшенія задачъ.	218

ВВЕДЕНИЕ.

Неудобство графическихъ способовъ опредѣленія частей прямолинейныхъ фигуръ. — Измѣреніе прямой. — О противоположныхъ направленіяхъ линій. — Измѣреніе угловъ и опредѣленіе относительнаго положенія угловъ на плоскости. — Обобщеніе понятія объ углахъ. — О круговомъ измѣреніи угла.

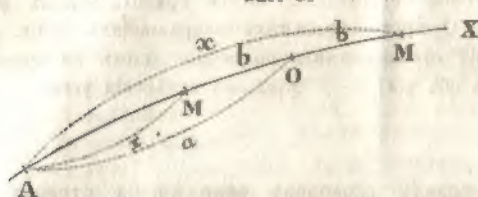
§ 1. Неудобство графическихъ способовъ опредѣленія сторонъ и угловъ въ прямолинейныхъ фигурахъ. При рѣшеніи практическихъ, а также и теоретическихъ вопросовъ, иногда требуется по достаточному числу данныхъ въ треугольникѣ или многоугольникѣ опредѣлить его остальные части. Въ начальной геометріи были уже изложены способы востроенія прямолинейныхъ фигуръ по достаточному числу въ нихъ данныхъ и опредѣленія численной величины искомымъ помощью масштаба и транспортира. Изложенный способъ опредѣленія неизвѣстныхъ, называемый *графическимъ*, хотя по теоріи легокъ и точенъ, но по причинѣ несовершенства инструментовъ, представляетъ то неудобство, что неизвѣстныя опредѣляются только приблизительно и притомъ такъ, что погрѣшность не можетъ быть сдѣлана сколь угодно малою. Это послѣднее обстоятельство и побудило розыскать формулы для вычисленія неизвѣстныхъ частей треугольника въ зависимости отъ данныхъ чрезъ введеніе особыхъ отношеній, опредѣляющихъ величины угловъ. Но прежде, чѣмъ приступимъ къ изложенію этихъ способовъ, скажемъ нѣсколько словъ объ измѣреніи линій и угловъ, а также и ихъ относительномъ положеніи.

§ 2. Измѣреніе прямой. Для измѣренія прямой, принимаютъ одну изъ опредѣленныхъ прямыхъ за единицу мѣры длины и узнаютъ отношеніе опредѣляемой длины къ длинѣ, принятой за единицу мѣры; а такъ какъ отношеніе этихъ линій будетъ нѣкоторое чи-

сло, то поэтому обыкновенно линію и означаютъ этимъ числомъ. Напр., если длина AB , принятая за единицу мѣры, заключается 7 разъ или a разъ въ длинѣ CD , то CD означаютъ 7 или a ; также, если длина линіи выражена дробью $\frac{3}{4}$, то это показываетъ, что отношеніе длины линіи къ единицѣ мѣры будетъ равно отношенію 3 къ 4, т. е. что данная длина составляетъ $\frac{3}{4}$ длины, принятой за единицу мѣры.

§ 3. О противоположныхъ направленіяхъ линіи. Пусть дана какая нибудь линія AX и на ней двѣ точки A и O , разстояніе между

Фиг. 1.



которыми означимъ буквою a ; также положимъ, что извѣстно разстояніе b отъ точки O до точки M этой линіи и мы желаемъ найти разстояніе отъ точки M до точки

A . Если означимъ буквою x это разстояніе, то

$$x = a + b \text{ и } x = a - b, \quad (1)$$

смотря потому въ какую сторону лежитъ точка M отъ точки O ; отсюда видимъ, что для опредѣленія искомага разстоянія x нужно взять двѣ формулы. Но эти формулы можно соединить въ одну, написавъ

$$x = a + z,$$

гдѣ, для полученія первой формулы, надо положить $z = +b$, а для полученія второй, положить $z = -b$; первое положеніе, т. е. $z = +b = +OM$ соотвѣтствуетъ точкѣ M , лежащей вправо отъ O на разстояніи b , а второе положеніе, т. е. $z = -b = -OM$ соотвѣтствуетъ точкѣ M , лежащей влѣво отъ O на разстояніи b . Поэтому, если условимся разстоянія, считаемаыя отъ точки O вправо, выражать числами съ знакомъ $+$, а разстоянія, считаемаыя отъ точки O влѣво, числами съ знакомъ $-$, то разстояніе всякой точки M до точки A выразится формулою: $x = a + z$.

Теперь положимъ, что точка A совпадаетъ съ O , т. е. $a = 0$; тогда $x = z$, и $z = +b$ или $x = +b$ будетъ выражать разстояніе отъ точки O до точки M , лежащей вправо отъ O , а $z = -b$ или $x = -b$ будетъ выражать разстояніе отъ O до точки M , лежащей влѣво отъ O . Въ этомъ случаѣ точка O наз. *началомъ*.

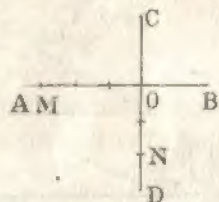
Формулы (1) можно соединить также въ одну вида: $x = a - a$; но тогда надо разстоянія съ $+$ считать влѣво отъ O , а съ $-$ вправо.

И такъ знаки $+$ и $-$ передъ числами, выражающими разстоянія данной точки линіи до другихъ ея точекъ, употребляются условно для отличія сторонъ. Мы будемъ, если не скажемъ противнаго, употреблять знакъ $+$ для правой (или верхней) стороны отъ начала и знакъ $-$ для лѣвой (или нижней).

Примѣръ I. Найти на прямой AB точку, отстоящую отъ данной точки O , принятой за начало, на разстояніи -3 .

Если дана единица мѣры, то откладываемъ по AB , влѣво отъ O , три такихъ единицы и получаемъ искомую точку M ; если же единица мѣры не дана, то принимаемъ какую либо опредѣленную прямую за единицу мѣры и поступаемъ какъ сказано.

Фиг. 2.

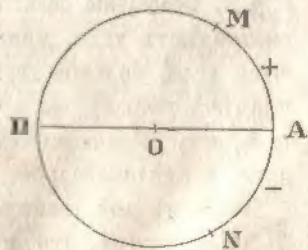


Примѣръ II. Найти на прямой CD (фиг. 2) точку, отстоящую отъ данной точки O , принятой за начало, на разстояніи -2 .

Отложимъ отъ точки O внизъ двѣ единицы длины и получимъ искомую точку N .

§ 4. Точно также, если по окружности круга будемъ означать дуги, отсчитываемыя отъ точки A вверхъ, числами съ $+$, то дуги, отсчитываемыя отъ точки A внизъ, надо означать числами съ $-$. Такъ, если отложимъ отъ A вверхъ $AM = 60^\circ$ и внизъ $AN = 60^\circ$, то первая дуга выразится чрезъ $+60^\circ$ или просто 60° , а вторая чрезъ -60° .

Фиг. 3.



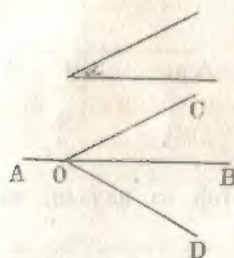
§ 5. Измѣреніе угловъ. При измѣреніи угловъ принимаютъ прямой уголъ за единицу мѣры и дѣлятъ его на 90^*) равныхъ частей, наз. градусами; уголъ въ градусъ дѣлятъ на 60 равныхъ

*) Во Франціи былъ предложенъ другой способъ дѣленія прямого угла, но не вошелъ въ употребленіе. Онъ состоитъ въ томъ, что прямой уголъ дѣлятъ на 100 равныхъ частей, наз. градусами; каждый градусъ на 100 минутъ и каждую минуту на 100 секундъ.

частей, наз. *минутами*; уголь въ минуту дѣлится на 60 равныхъ частей, наз. *секундами*; части же меньшія секунды выражаютъ въ доляхъ секунды. Прямой уголь обыкновенно означаютъ буквою d , а градусы, минуты и секунды посредствомъ знаковъ: $^{\circ}$, $'$ и $''$; такимъ образомъ половину прямого — пишутъ $\frac{1}{2}d$; 15 градусовъ 8 минутъ и 6,5 секунды — пишутъ $15^{\circ}8'6,5$. Слѣдовательно, уголь будетъ извѣстенъ, если знаемъ его отношеніе къ прямому углу или, все равно, знаемъ сколько въ немъ содержится градусовъ, минутъ и секундъ.

§ 6. **Опредѣленіе относительнаго положенія угла на плоскости.** Положимъ, что на прямой AB при точкѣ O , требуется отложить

Фиг. 4.



уголь α . Для рѣшенія вопроса, мы можемъ построить или, надъ AB , уголь COB , равный α , или же, внизъ отъ AB , уголь DOB , равный α .

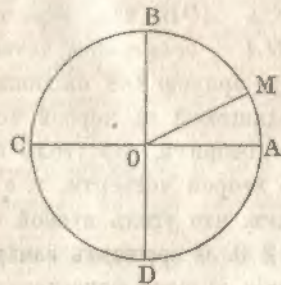
Чтобы знать, въ какую сторону откладывать данный уголь, условимся ставить знаки $+$ и $-$ передъ числами, выражающими величины углоу. Мы будемъ употреблять, если не скажемъ противнаго, знакъ $+$ для чиселъ, выражающихъ величины углоу, откладываемыхъ вверху отъ даннаго горизонтальнаго направленія, и знакъ $-$ для чиселъ, выражающихъ величины углоу, откладываемыхъ внизъ отъ даннаго горизонтальнаго направленія.

§ 7. **Обобщеніе понятія объ углѣ.** Въ геометріи обыкновенно рассматриваютъ углы, меньшіе двухъ прямыхъ, хотя и не исключаются углы, большіе двухъ прямыхъ. Дѣйствительно, возьмемъ для примѣра теорему; *въ кругѣ центральные углы пропорціональны дугамъ, имъ соответствующимъ*; здѣсь нѣтъ предѣла для увеличенія дуги, а слѣдовательно, и нѣтъ предѣла для увеличенія угла.

Возьмемъ двѣ взаимно-перпендикулярныя прямыя (фиг. 5) AC и BD и положимъ, что опредѣленная прямая OM вращается вверху отъ первоначальнаго положенія OA и около своего конца O , не выходя изъ плоскости. Когда прямая OM займетъ положеніе, указанное на 5 чертежѣ, то составитъ съ OA уголь AOM ; когда OM совпадетъ съ направленіемъ OB , то уголь, описанный OM , будетъ прямой; когда OM совпадетъ съ направленіемъ OC , то уголь, описанный OM , будетъ равенъ двумъ прямымъ; когда OM совпадетъ съ OD , то уголь, описанный OM , будетъ равенъ тремъ пря-

мымъ и, наконецъ, когда OM совпадетъ опять съ OD , то уголь описанный OM , будетъ равенъ четыремъ прямымъ. Если будемъ продолжать OM вращать, то уголь, описываемый OM , будетъ болѣе четырехъ прямыхъ; такъ когда OM совпадетъ съ направлениемъ OB , то уголь, описанный OM , будетъ равенъ пяти прямымъ и т. д. Слѣдовательно, если прямая OM заняла положеніе, указанное на чертежѣ, при первомъ ея вращеніи, то уголь между OA и OM равенъ углу AOM или, означивъ уголь AOM буквою α , равенъ α ; если прямая OM заняла положеніе, указанное на чер-

Фиг. 5.



тежѣ, при второмъ вращеніи, то уголь, описанный прямою OM , равенъ $\alpha + 4d$; если OM заняла положеніе, указанное на чертежѣ, при третьемъ вращеніи, то уголь, описанный OM , равенъ $\alpha + 2 \cdot 4d$ и т. д., и, наконецъ, уголь, описанный прямою OM при $n + 1$ вращеніи, равенъ $\alpha + n \cdot 4d = \alpha + n \cdot 360^\circ = \alpha + 2n \cdot 180^\circ$, гдѣ n цѣлое и положительное число. Когда же OM будемъ вращать внизъ отъ первоначальнаго положенія OA , то углы будутъ выражаться отрицательными числами (§ 6); такъ, когда OM совпадетъ съ OD , то число для угла, описаннаго OM , выразится чрезъ $-d$; когда OM совпадетъ съ OC , то, число для угла, описаннаго прямою OM , выразится чрезъ $-2d$, потомъ чрезъ $-3d$, $-4d$ и т. д. Слѣдов., когда OM займетъ положеніе, указанное на чертежѣ, то число для угла, описаннаго OM , будетъ равно $-(3d + BOM) = -[3d + (d - \alpha)] = -(4d - \alpha)$; но этотъ уголь можно разсматривать какъ результатъ вычитанія изъ угла α угла, равнаго $4d$, и потому уголь описанный линіею OM , будетъ равенъ $\alpha - 4d$. Если OM займетъ положеніе, указанное на чертежѣ, послѣ второго вращенія, то число для угла, описаннаго OM , равно: $-(7d + BOM) = -(7d + d - \alpha) = \alpha - 8d = \alpha - 2 \cdot 4d$ и т. д.; вообще, если прямая OM послѣ n вращеній внизъ отъ OA займетъ положеніе, указанное на чертежѣ, то число для угла, описаннаго OM , выразится чрезъ $\alpha - n \cdot 4d = \alpha - 4nd = \alpha - 2n \cdot 180^\circ$, гдѣ n цѣлое и положительное число.

Изъ этихъ разсужденій видимъ, что если въ данномъ углу одинъ изъ боковъ угла повернемъ въ ту или другую сторону на учетверен-

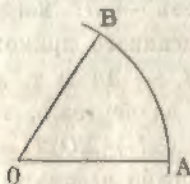
ное число прямых угловъ, то онъ приметъ первоначальное направле-
ніе.

§ 8. Прямая AC и BD (фиг. 5) дѣлятъ кругъ на четыре рав-
ныя части, которыя называются *четвертями* круга (квадрантами);
часть AOB наз. *первою*, BOC — *второю*, COD — *третьею* и
 DOA — *четвертою* четвертью. Если уголь составленъ неподвиж-
ною прямою OA съ движущеюся вверхъ отъ нея прямою OM , на-
ходящеюся въ первой четверти, т.-е. уголь болѣе 0° и менѣе 90° ,
то говорятъ, что уголь первой четверти; если прямая OM лежитъ
во второй четверти, т.-е. уголь болѣе 90° и менѣе 180° , то гово-
рятъ, что уголь второй четверти и т. д.

§ 9. О круговомъ измѣреніи угла. Кромѣ указаннаго способа измѣ-
ренія угловъ, существуетъ еще другой способъ, о которомъ сейчасъ
сообщимъ и который часто употребляется въ математикѣ. Докажемъ
сперва, что въ кругѣ *центральный уголь, опирающійся на дугу,*
равную радіусу круга, есть величина постоянная.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ дугу AB , равную радіусу OA , и
точки A и B соединимъ прямыми съ центромъ O дуги AB ; тогда,
зная, что въ кругѣ центральные углы пропорціональны дугамъ,
имъ соответствующимъ, можемъ написать:

Фиг. 6.



$$\frac{\angle AOB}{4d} = \frac{\text{дуга } AB}{\text{о́круж. круга}}$$

но дуга AB равна радіусу OA , который озна-
чимъ буквою r , а о́кружность круга равна $2\pi r$
и потому

$$\frac{\angle AOB}{4d} = \frac{r}{2\pi r} \text{ или } \frac{\angle AOB}{4d} = \frac{1}{2\pi}$$

откуда

$$\angle AOB = \frac{4d}{2\pi} = \frac{2d}{\pi}$$

гдѣ d и π суть величины постоянныя. Изъ этого равенства ви-
димъ, что уголь AOB есть величина постоянная, какой бы ни
былъ радіусъ круга.

§ 10. Такъ какъ центральный уголь въ кругѣ, опирающійся на
дугу, равную радіусу, есть постоянный уголь, то можно принять
его за единицу мѣры для угловъ, и тогда каждый изъ другихъ
угловъ можетъ быть выраженъ помощію этой единицы мѣры. Дѣй-

ствительно, возьмемъ какой-нибудь уголъ COA и изъ точки O опишемъ дугу радиусомъ OA ; отложимъ отъ точки A дугу AB , равную радиусу OA , и точку B соединимъ съ центромъ; найдемъ:

$$\frac{\angle AOC}{\angle AOB} = \frac{\text{дуга } AC}{\text{дуга } AB}$$

Означивъ дугу AC буквою l , а радиусъ OA буквою r , получимъ:

$$\frac{\angle AOC}{\angle AOB} = \frac{l}{r}; \text{ откуда } \angle AOC = \frac{l}{r} \cdot \angle AOB;$$

что равенство справедливо при всякой единицѣ мѣры угловъ, а потому, принявъ уголъ AOB за единицу мѣры угловъ, найдемъ:

$$\angle AOC = \frac{l}{r};$$

слѣд., уголъ можетъ быть выраженъ дробью, у которой числитель есть дуга, описанная изъ вершины угла и заключающаяся между его боками, а знаменатель - радиусъ дуги; эта дробь выражена въ частяхъ угла, принятаго за единицу мѣры и равнаго (§ 9) $\frac{2d}{\pi}$.

§ 11. Не трудно опредѣлять число градусовъ, заключающихся въ углѣ, принятомъ за единицу мѣры; онъ равенъ $\frac{2d}{\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57,29577951 \dots$ градуса или равенъ $57^\circ 17' 44'', 806$ съ точностью до 0,001 секунды. Слѣдовательно, если, напр. уголъ равенъ $\frac{2}{3}$, то это значитъ, что онъ составляетъ $\frac{2}{3}$ угла, принятаго за единицу мѣры и равняется $\frac{2}{3} \cdot 57,29577951 \dots$ градуса, что составляетъ $38^\circ 11' 49'', 87$ съ точностью до $0'', 01$.

§ 12. Дробь, происшедшая отъ дѣленія дуги на соответствующій радиусъ, называется *круговою мѣрою угла*. Напр., если означимъ радиусъ окружности буквою r , то круговая мѣра четырехъ прямыхъ угловъ будетъ $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$; круговая мѣра двухъ прямыхъ угловъ будетъ π ; круговая мѣра прямого угла будетъ $\frac{\pi}{2}$; круговая мѣра n прямыхъ угловъ будетъ $\frac{n\pi}{2}$; круговая мѣра угла въ 45° бу-

детъ $\frac{\pi}{4}$. Также, если круговая мѣра угла $АОМ$ (фиг. 5) при первомъ вращеніи $ОМ$ была ϑ , то круговая мѣра угла $АОМ$, когда прямая $ОМ$ сдѣлала нѣсколько оборотовъ въ ту или другую сторону отъ $ОА$, будетъ $\vartheta + 2n\pi$, гдѣ n цѣлое, положительное или отрицательное число.

§ 13. Зная число градусовъ въ углѣ, легко опредѣлить его угловую мѣру и обратно. Дѣйствительно, пусть a означаетъ число градусовъ въ данномъ углѣ и ϑ круговую мѣру этого же угла; тогда въ двухъ прямыхъ углахъ заключается 180° , а потому дробь $\frac{a}{180}$ выражаетъ отношеніе данного угла къ двумъ прямымъ; круговая мѣра двухъ прямыхъ угловъ есть π , а потому дробь $\frac{\vartheta}{\pi}$ выражаетъ также отношеніе данного угла къ двумъ прямымъ; слѣдовательно,

$$\frac{a}{180} = \frac{\vartheta}{\pi};$$

откуда

$$\vartheta = \frac{\pi a}{180} \dots (m) \text{ и } a = \frac{180 \cdot \vartheta}{\pi} \dots (n)$$

Помощью этихъ формулъ можно перейти отъ градуснаго измѣренія угла къ круговой мѣрѣ угла и обратно

Примѣръ I. Опредѣлить круговую мѣру угла, равнаго 9° . Подставивъ въ (m) формулу 9 вмѣсто a , найдемъ, что круговая мѣра угла въ 9° равна $\frac{9\pi}{180} = \frac{\pi}{20} = 0,157079632679 \dots$

Примѣръ II. Опредѣлить круговую мѣру угла, равнаго минутѣ. Минута составляетъ $\frac{1}{60}$ градуса, а потому, подставивъ въ (m) формулу $\frac{1}{60}$ вмѣсто a , найдемъ: $\vartheta = \frac{\pi}{180 \cdot 60} = 0,0002908882 \dots$

Примѣръ III. Опредѣлить круговую мѣру угла, равнаго 1 секундѣ. Секунда составляетъ $\frac{1}{60 \cdot 60}$ часть градуса, а потому, подставивъ въ формулѣ (m) $\frac{1}{60 \cdot 60}$ вмѣсто a , найдемъ, что круговая мѣра угла въ секунду равна $\frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} = 0,000004848 \dots$

$\frac{26}{7}$

Примѣръ IV. Круговая мѣра угла есть $^{\circ}$; опредѣлить величину угла въ градусахъ. Подставивъ въ (n) формулѣ $^{\circ}$, вмѣсто З , найдемъ, что число градусовъ въ данномъ углѣ есть $\frac{3}{4} \cdot \frac{180}{\pi}$; но (§ 11) $\frac{180}{\pi} = 57,29577951\dots$ градуса, а потому въ данномъ углѣ заключается $\frac{3}{4} \cdot 57,29577951\dots$ градуса или $42^{\circ}58'18'',6$ съ точностью до 0,1 секунды.

§ 14. Для избѣжанія большихъ перемноженій и дѣленій при переходѣ отъ круговаго измѣренія угла къ измѣренію угла градусами и обратно, составлена особая таблица, съ помощью которой вычисленіе упрощается. Читатель эту таблицу можетъ найти въ семизначныхъ таблицахъ логарифмовъ Вега (стр. 288), гдѣ она озаглавлена такъ: *длина обвота круга для радиуса 1* и въ пятизначныхъ таблицахъ логарифмовъ, изданныхъ мною (стр. 156 и 157), гдѣ она озаглавлена такъ: *длина дуги круга при радиусѣ равномъ 1*. Эта таблица, взятая въ логариомахъ Вега или въ пятизначныхъ таблицахъ, вертикальными прямыми раздѣлена на части съ надписями сверху: градусы, минуты и секунды; рядомъ съ числомъ градусовъ, минутъ и секундъ стоятъ числа, показывающія круговую мѣру угловъ, соответствующихъ взятому числу градусовъ, минутъ и секундъ. Напр., рядомъ съ 75° стоитъ число 1,3089969, показывающее, что круговая мѣра угла въ 75° есть 1,3089969.

Примѣръ I. Опредѣлить круговую мѣру угла, содержащаго $165^{\circ}43'26'',64$.

Въ этой таблицѣ находимъ:

165 ^o	соотвѣтствуетъ	2,8797933
43'	0,0125082
26"	0,0001261
0",6	0,0000029
0",04	0,0000002
Искомая круг. мѣра		— 2,8924307.

Примѣръ II. Круговая мѣра угла равна 1,47683; найти величину угла въ градусахъ.

Въ той же таблицѣ ищемъ данное число, а если его нѣтъ, то ближайшее меньшее; находимъ: 1,4660766, которому соответствуетъ 84° ; найденное число 1,4660766 вычитаемъ изъ даннаго числа и получаемъ: 0,0107534. Ищемъ ближайшее меньшее число къ

полученному остатку и находимъ: 0,0104720, которому соответствуетъ 36'; найденное число 0,0104720 вычитаемъ изъ перваго остатка и получаемъ: 0,0002814. Опять ищемъ ближайшее меньшее число къ второму остатку и находимъ: 0,0002812, которому соответствуетъ 58"; найденное число 0,0002812 вычитаемъ изъ 0,0002814 и находимъ: 0,0000002. Ближайшаго меньшаго числа къ этому остатку нѣтъ въ таблицѣ, а потому увеличиваемъ его въ 10 разъ; получаемъ: 0,0000020 и ищемъ къ нему ближайшее меньшее число; въ таблицѣ не находится такого числа, а потому число 0,0000020 увеличиваемъ еще въ 10 разъ; находимъ: 0,0000200; къ этому числу въ таблицѣ есть ближайшее 0,0000194, которому соответствуетъ 4"; слѣдовательно, числу 0,0000002 соответствуетъ число секундъ во 100 разъ меньшее 4", т. е. 0",04.

И такъ, данный уголъ содержитъ $84^{\circ}36'58",04$, съ точн. до $0",01$. Самыя дѣйствія располагаютъ такъ:

1,47683	
1,4660766	84°
0,0107534	
0,0104720	36'
0,0002814	
2812	58"
0,0000002	0",04.

ОТДѢЛЪ I.

Предметъ тригонометрии. — Тригонометрическія величины Измѣненія тригонометрическихъ величинъ съ измѣненіемъ угла. — Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ для отрицательнаго угла. — Отношенія между тригонометрическими величинами для одного и того же угла. — Объ опредѣленіяхъ тригонометрическихъ величинъ.

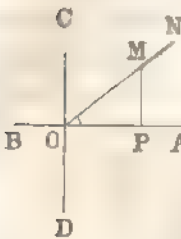
1.

§ 15. Предметъ тригонометріи и тригонометрическія величины. Слово тригонометрія происходитъ отъ двухъ греческихъ словъ: *τριγωνου* *треугольничъ* и *μετροο* — *измѣряю*. Первоначально предметъ тригонометрии состоялъ въ опредѣленіи (вычисленіи) неизвѣстныхъ частей треугольника, когда въ немъ имѣлось достаточное число данныхъ, помощью формулъ, выражающихъ отношенія между углами и сторонами прямолинейнаго или сферическаго треугольника; смотря по

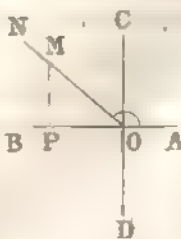
тому, какой разсматривался треугольникъ, тригонометрія дѣлилась на двѣ части: *плоскую* и *сферическую*. Въ настоящее время это дѣленіе тригонометрии хотя и осталось, но предметъ плоской или прямолинейной тригонометрии имѣеть болѣе обширное значеніе, какъ увидимъ послѣ.

§ 16. Возьмемъ двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя AB и CD , пересѣкающіяся въ точкѣ O ; пусть прямая ON вращается

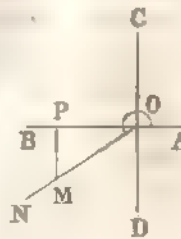
Фиг. 8.



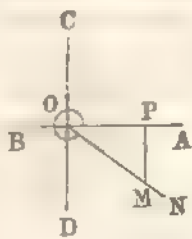
Фиг. 9.



Фиг. 10.



Фиг. 11.



въ той же плоскости, гдѣ AB и CD , около точки O и влѣво отъ прямой OA , съ которою она первоначально совпадала, т. е. по направленію къ OC , OB , OD и т. д. и заняла послѣдовательно положенія, указанныя на 8, 9, 10 и 11 фигурахъ; тогда углы, описанные прямою OM , считая отъ OA , будутъ тѣ, которые отчеркнуты на этихъ фигурахъ. Изъ какой-нибудь точки M , взятой на прямой ON , опустимъ перпендикуляръ MP на AB и будемъ длину линіи OM считать всегда положительною, а OP (проекцію OM на AB) будемъ считать положительною, когда она лежитъ вправо отъ O (фиг. 8 и 11), и отрицательною, когда она лежитъ влѣво отъ точки O (фиг. 9 и 10); точно также длину проектирующаго перпендикуляра MP будемъ считать положительною, когда онъ лежитъ вверхъ отъ AB (фиг. 8 и 9), и отрицательною, когда онъ лежитъ внизъ отъ AB (фиг. 10 и 11). При всякомъ положеніи линіи ON ,

отношеніе MP къ OM , т. е. перпендикуляра къ наклонной, наз. *синусомъ* угла AON ;

отношеніе OP къ OM , т. е. проекціи наклонной къ самой наклонной, наз. *косинусомъ* угла AON ;

отношеніе MP къ OP , т. е. перпендикуляра къ проекціи наклонной, наз. *тангенсомъ* угла AON ;

отношение OP къ MP , т. е. проекция наклонной къ перпендикуляру, наз. *котангенсомъ* угла $\angle ON$,

отношение OM къ OP , т. е. наклонной къ ея проекции, наз. *секансомъ* угла $\angle ON$ и

отношение OM къ MP , т. е. наклонной къ перпендикуляру, наз. *косекансомъ* угла $\angle ON$.

Разность между 1 и косинусомъ угла наз. *синусомъ версусомъ* того же угла, а разность между 1 и синусомъ угла наз. *косинусомъ версусомъ* того же угла.

Синусъ, косинусъ, тангенсъ, котангенсъ, секансъ, косекансъ, синусъ-версусъ и косинусъ-версусъ обозначаются соответственно знаками \sin , \cos , \tan или tg , \cot и ctg , \sec , \csc , vers и covers ; слѣдовательно

$$\sin \angle ON = \frac{MP}{OM}, \quad \cos \angle ON = \frac{OP}{OM}, \quad \tan \angle ON = \frac{MP}{OP},$$

$$\cot \angle ON = \frac{OP}{MP}, \quad \sec \angle ON = \frac{OM}{OP}, \quad \csc \angle ON = \frac{OM}{MP},$$

$$\text{vers} \angle ON = 1 - \cos \angle ON \quad \text{и} \quad \text{covers} \angle ON = 1 - \sin \angle ON.$$

§ 17. \sin , \cos , tg , ctg , \sec , \csc , vers и covers наз. *тригонометрическими отношеніями* или *величинами*; подъ этими названіями должно подразумѣвать не длины, а отношенія длинъ, и потому тригонометрически величины суть *отвлеченныя числа*.

Предметъ тригонометрии состоитъ въ изслѣдованіи свойствъ и отношеній между тригонометрическими величинами.

§ 18. Тригонометрическія величины для угла не измѣнятся до тѣхъ поръ, пока не измѣнимъ угла. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ

какойнибудь уголь ABC и изъ какихъ либо точекъ M, N, \dots прямой BC опустимъ перпендикуляры MP, NQ, \dots на сторону AB и изъ какихъ либо точекъ K, L, \dots прямой AB опустимъ перпендикуляры KR, LS, \dots на BC ; тогда, изъ подобія треугольничковъ $BMP, BNQ, BKR, BLS, \dots$ получимъ:

$$\frac{MP}{BM} = \frac{NQ}{BN} = \frac{KR}{BK} = \frac{LS}{BL}$$

Но каждое изъ этихъ отношеній есть (§ 16) $\sin B$, а потому выходитъ, что синусъ угла B останется тотъ же самый — разсматриваемъ ли треугольничекъ BMP , или треугольничекъ BNQ и т. д. Беря другія отношенія сторонъ этихъ треугольничковъ, увидимъ, что и

Фиг. 12

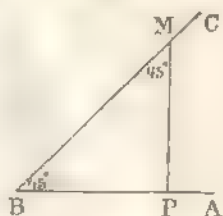


другія тригонометрическія величины будутъ тѣ же, какой бы не разсматривали треугольникъ.

§ 19. Задача 1. *Определить тригонометрическія величины для угла въ 45°*

Начертимъ уголь $ABC' = 45^\circ$ изъ точки M , взятой произвольно на BC , опустимъ перпендикуляръ MP на AB ; тогда, уголь $BMP = 90^\circ - B = 45^\circ$ и слѣдовательно $BP = MP$. Изъ прямоугольнаго треугольника BMP имѣемъ:

Фиг. 13.



$BM = \sqrt{BP^2 + MP^2} = \sqrt{BP^2 + BP^2} = \sqrt{2BP^2} = BP\sqrt{2}$; также получимъ (§ 16):

$$\sin 45^\circ = \frac{MP}{BM} = \frac{BP}{BP\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \cos 45^\circ = \frac{BP}{BM} = \frac{BP}{BP\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{MP}{BP} = \frac{BP}{BP} = 1; \operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{BP}{MP} = \frac{BP}{BP} = 1; \operatorname{sec} 45^\circ =$$

$$= \frac{BM}{BP} = \frac{BP\sqrt{2}}{BP} = \sqrt{2}; \operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{BM}{MP} = \frac{BP\sqrt{2}}{BP} = \sqrt{2}; \operatorname{vers} 45^\circ =$$

$$= 1 - \cos 45^\circ = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } \operatorname{covers} 45^\circ = 1 - \sin 45^\circ = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

§ 20. Задача 2. *Определить тригонометрическія величины для угла въ 60°.*

Возьмемъ равносторонній треугольникъ ABC' и изъ точки C' опустимъ перпендикуляръ CD на AB , который раздѣлитъ сторону AB на двѣ равныя части; слѣдовательно $AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AC'$. Изъ прямоугольнаго треугольника ACD , имѣемъ:

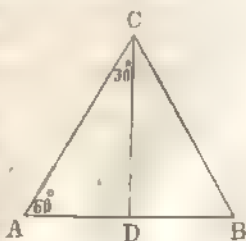
$$CD = \sqrt{AC'^2 - AD^2} = \sqrt{AC'^2 - \frac{1}{4}AC'^2} = \sqrt{\frac{3}{4}AC'^2} = \frac{1}{2}AC'\sqrt{3}.$$

Каждый изъ угловъ треугольника ABC' содержитъ по 60° , а потому

$$\sin 60^\circ = \frac{CD}{AC'} = \frac{\frac{1}{2}AC'\sqrt{3}}{AC'} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos 60^\circ = \frac{AD}{AC'} = \frac{\frac{1}{2}AC'}{AC'} = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{CD}{AD} = \frac{\frac{1}{2}AC'\sqrt{3}}{\frac{1}{2}AC'} = \sqrt{3}; \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{AD}{CD} = \frac{\frac{1}{2}AC'}{\frac{1}{2}AC'\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

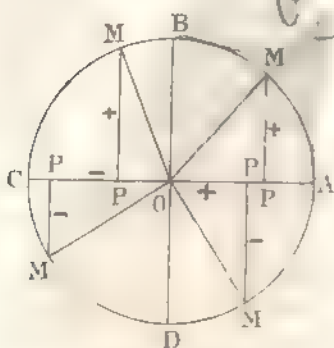
Фиг. 14.



$$\sec 60^\circ = \frac{AC}{AP} = \frac{AC}{\frac{1}{2}AC} = 2; \quad \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{AC}{CD} = \frac{AC}{\frac{1}{\sqrt{3}}AC} = \sqrt{3}.$$

$$\operatorname{vers} 60^\circ = 1 - \cos 60^\circ = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{covers} 60^\circ = 1 - \sin 60^\circ = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Фиг. 15



§ 21. Измѣненія тригонометрическихъ величинъ съ измѣненіемъ угла. Возьмемъ двѣ взаимно-перпендикулярныя прямыя AC и BD и предположимъ, что опредѣленная прямая OM вращается вверхъ отъ OA около своего конца O , не выходя изъ плоскости; тогда другой конецъ ее M опишетъ, присвоимъ движенію, окружность $ABCD$. Изъ точки M опустимъ перпендикуляръ MP на прямую AC и разсмотримъ отдѣльно

измѣненія каждой изъ тригонометрическихъ величинъ.

§ 22. Измѣненія синуса (фиг. 15). Намъ извѣстно (§ 16), что

$$\sin AOM = \frac{MP}{OM}.$$

Когда OM совпадаетъ съ OA , то уголъ $AOM = 0^\circ$ и $MP = 0$; слѣдовательно

$$\sin 0^\circ = \frac{0}{OM} = 0.$$

Когда OM двигается въ первой четверти и вверхъ отъ OA , то MP будетъ положительнымъ (§ 3) и будетъ увеличиваться, потому что MP есть полухорда круга, которая увеличивается по мѣрѣ приближенія ея къ центру; слѣдовательно $\sin AOM$ будетъ также увеличиваться и наконецъ, когда OM совпадетъ съ OB , то уголъ AOM будетъ равенъ 90° и $MP = OB = OM$; поэтому

$$\sin 90^\circ = \frac{OM}{OM} = 1.$$

Когда OM двигается во второй четверти (отъ 90° до 180°), то MP остается положительнымъ и уменьшается по мѣрѣ приближенія OM къ OC , т. е. по мѣрѣ увеличенія угла AOM ; когда же OM совпадаетъ съ OC , то $MP = 0$, уголъ $AOM = 180^\circ$ и

$$\sin 180^\circ = \frac{0}{OM} = 0.$$

Когда OM движется въ третьей четверти (отъ 180° до 270°), то MP будетъ отрицательнымъ (§ 3), абсолютная же величина MP увеличивается и наконецъ достигаетъ $OD = OM$; при совпадении OM съ OD уголъ $AOM = 270^\circ$ и

$$\sin 270^\circ = \frac{-OD}{OM} = -\frac{OM}{OM} = -1.$$

При движеніи OM въ четвертой четверти (отъ 270° до 360°), MP остается отрицательнымъ (§ 3): абсолютная же величина MP уменьшается и будетъ равна нулю, когда OM совпадетъ съ OA , т. е. когда уголъ $AOM = 360^\circ$; получимъ:

$$\sin 360^\circ = \frac{-0}{OM} = 0.$$

При дальнѣйшемъ движеніи линіи OM , синусъ очевидно будетъ измѣняться также, какъ и при первомъ ея вращеніи, потому что, повернувъ одинъ изъ боковъ угла въ ту или другую сторону на учетверенное число примыхъ угловъ (§ 7), бока угла сохраняютъ тоже направление, какое имѣли при первомъ вращеніи; а потому, означивъ буквою α данный уголъ и буквою n — цѣлое число, найдемъ:

$$\sin(\alpha + n \cdot 4d) = \sin(\alpha + 2n \cdot 180^\circ) = \sin \alpha$$

или, означивъ круговую мѣру угла α буквою ϑ , получимъ:

$$\sin(\vartheta + 2n\pi) = \sin \vartheta.$$

Изъ предъидущаго видимъ, что для угловъ первой и второй четверти синусы будутъ положительныя, а для угловъ третьей и четвертой — отрицательныя; также замѣчаемъ, что величины синусовъ угловъ заключаются между $+1$ и -1 .

Такъ какъ синусы положительныя, когда уголъ заключается между 0 и 180° , а отрицательныя, когда уголъ заключается между 180° и 360° , то поэтому (§ 7) синусы будутъ положительными, когда уголъ заключается между $2n \cdot 180^\circ$ и $(2n + 1)180^\circ$, гдѣ n цѣлое число, и — отрицательными, когда уголъ заключается между $(2n + 1)180^\circ$ и $(2n + 2)180^\circ$, гдѣ n цѣлое число.

§ 23. Измѣненія косинуса (фиг. 15). По опредѣленію косинуса (§ 16) имѣемъ:

$$\cos AOM = \frac{OP}{OM}.$$

Когда OM совпадаетъ съ OA , то $OP = OA$ и уголъ $AOM = 0^\circ$; поэтому

$$\cos 0^\circ = \frac{OA}{OM} = \frac{OM}{OM} = 1.$$

Когда OM движется въ первой четверти (отъ 0° до 90°), то OP будетъ положительнымъ (§ 3) и будетъ уменьшаться, а следовательно и косинусъ угла AOM будетъ также уменьшаться; но, когда OM совпадетъ съ OB , то уголъ $AOM = 90^\circ$ и $OP = 0$; поэтому

$$\cos 90^\circ = \frac{0}{OM} = 0.$$

Двигаясь далѣе, во второй четверти (отъ 90° до 180°), OM приближается къ OC ; здѣсь OP будетъ отрицательнымъ (§ 4), но абсолютная величина OP увеличивается по мѣрѣ приближенія OM къ OC . При совпадении OM съ OC , уголъ $AOM = 180^\circ$, $OP = OC = OM$ и тогда

$$\cos 180^\circ = \frac{-OC}{OM} = -\frac{OM}{OM} = -1.$$

Когда OM движется въ третьей четверти (отъ 180° до 270°), то OP будетъ отрицательнымъ (§ 3), а следовательно и косинусъ будутъ отрицательные; когда же OM совпадетъ съ OD , то уголъ AOM будетъ равенъ 270° и $OP = 0$. Поэтому

$$\cos 270^\circ = \frac{-0}{OM} = 0.$$

При движеніи OM въ четвертой четверти (отъ 270° до 360°), OP будетъ положительнымъ (§ 3) и будетъ увеличиваться по мѣрѣ увеличенія угла AOM ; когда же OM совпадетъ съ OA , то уголъ AOM будетъ равенъ 360° и $OP = OA = OM$; а потому

$$\cos 360^\circ = \frac{OP}{OM} = \frac{OM}{OM} = 1.$$

Продолжая двигать OM далѣе, увидимъ, что косинусъ будетъ измѣняться, какъ и при первомъ вращеніи линіи OM . Поэтому можемъ написать, какъ и для синуса, что

$\cos(\alpha + 4nd) = \cos(\alpha + 2n \cdot 180^\circ) = \cos \alpha$ и $\cos(\beta + 2n\pi) = \cos \beta$, гдѣ n цѣлое, положительное или отрицательное число.

§ 24. *Измѣненія тангенса* (фиг. 15). На основаніи опредѣленія (§ 16) можемъ написать:

$$\operatorname{tg} AOM = \frac{MP}{OP}.$$

Когда OM совпадаетъ съ OA , то уголъ $AOM = 0^\circ$, $MP = 0$ и $OP = OA$; а потому

$$\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{0}{OA} = 0.$$

Когда OM движется въ первой четверти (отъ 0° до 90°), т. е. отъ OA къ OB , то MP будетъ положительнымъ (§ 3) и будетъ увеличиваться, а OP будетъ положительнымъ и — уменьшаться; отсюда видимъ, что для угловъ первой четверти тангенсы увеличиваются съ увеличениемъ угла. Когда же OM совпадетъ съ OB , то уголъ $AOM = 90^\circ$, $MP = OB$, $OP = 0$ и

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \frac{OB}{0} = \infty.$$

Продолжая OM двигать далѣе, замѣтимъ, что, во второй четверти (отъ 90° до 180°), MP будетъ положительнымъ, а OP отрицательнымъ (§ 3), а потому тангенсы будутъ отрицательные; когда же OM совпадетъ съ OC , то уголъ $AOM = 180^\circ$, $MP = 0$, $OP = -OC = -OM$ и

$$\operatorname{tg} 180^\circ = \frac{0}{-OM} = 0^*.$$

Въ третьей четверти (отъ 180° до 270°), OM движется отъ OC къ OD , здѣсь MP и OP отрицательны (§ 3); при чемъ абсолютная величина MP возрастаетъ, а OP — уменьшается; слѣдов. тангенсы въ этой четверти будутъ положительные и будутъ увеличиваться по мѣрѣ увеличенія угла. Когда же OM совпадетъ съ OD , то $MP = OD$, $OP = 0$ и уголъ $AOM = 270^\circ$; поэтому

$$\operatorname{tg} 270^\circ = \frac{-OD}{-0} = \infty.$$

Наконецъ, когда OM движется въ четвертой четверти (отъ 270° до 360°), то MP будетъ отрицательнымъ (§ 3), а OP — положительнымъ; абсолютная же величина MP уменьшается, а OP увеличивается. Следовательно, тангенсы въ четвертой четверти будутъ отрицательные; абсолютная же величина ихъ уменьшается по мѣрѣ

* Если радиусъ OM будемъ двигать во второй четверти отъ OC къ OB , то тангенсъ будетъ отрицательнымъ и абсолютная величина его будетъ увеличиваться; когда же OM совпадетъ съ OB , то $\operatorname{tg} 90^\circ$ будетъ равенъ ∞ . Поэтому $\operatorname{tg} 90^\circ$ будетъ равенъ $\pm\infty$.

увеличенія угла. Когда же OM совпадетъ съ OA , то уголъ $AOM = 360^\circ$, $MP = 0$, $OP = OA$ и

$$\operatorname{tg} 360^\circ = \frac{-0}{OA} = 0.$$

Относительно измененія тангенса при дальнѣйшемъ движеніи OM можемъ сказать то же, что сказали и о синусѣ; можемъ также написать, что

$\operatorname{tg}(\alpha + 4n\pi) = \operatorname{tg}(\alpha + 2n \cdot 180^\circ) = \operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg}(\vartheta + 2n\pi) = \operatorname{tg} \vartheta$,
гдѣ n цѣлое, положительное или отрицательное число.

Изъ предъидущихъ изслѣдованій видимъ, что тангенсы для угловъ первой и третьей четвертей будутъ положительныя, а для угловъ второй и четвертой будутъ отрицательныя и что величины тангенсовъ измѣняются отъ $+\infty$ до $-\infty$.

§ 25. *Измѣненія котангенса* (фиг. 16). По опредѣленію (§ 16):

$$\operatorname{ctg} AOM = \frac{OP}{MP}.$$

Когда OM совпадаетъ съ OA , то уголъ $AOM = 0^\circ$, $OP = OA$, $MP = 0$ и слѣдовательно

$$\operatorname{ctg} 0^\circ = \frac{OA}{0} = \infty.$$

Когда OM двигается въ первой четверти (отъ 0° до 90°), то OP уменьшается, а MP увеличивается и оба будутъ положительными; слѣдовательно котангенсы въ первой четверти положительныя и уменьшаются съ увеличеніемъ угла. При совпадении же OM съ OB , $MP = OB$, $OP = 0$ и уголъ $AOM = 90^\circ$; поэтому

$$\operatorname{ctg} 90^\circ = \frac{0}{OB} = 0.$$

Продолжая изслѣдованіе, увидимъ, что для угловъ второй четверти котангенсы будутъ отрицательныя и $\operatorname{ctg} 150^\circ = -\infty$; для угловъ третьей четверти котангенсы будутъ положительныя и $\operatorname{ctg} 270^\circ = 0$; для угловъ четвертой четверти котангенсы отрицательныя и $\operatorname{ctg} 360^\circ = -\infty$. Также найдемъ, что $\operatorname{ctg}(\alpha + 4n\pi) = \operatorname{ctg}(\alpha + 2n \cdot 180^\circ) = \operatorname{ctg} \alpha$ и $\operatorname{ctg}(\vartheta + 2n\pi) = \operatorname{ctg} \vartheta$, гдѣ n цѣлое, положительное или отрицательное число.

§ 26. *Измѣненія секанса* (фиг. 15). Изъ чертежа имѣемъ (§ 16):

$$\operatorname{sec} AOM = \frac{OM}{OP}.$$

Когда OM совпадаетъ съ OA , то $OP = OA = OM$ и уголъ $AOM = 0^\circ$, поэтому

$$\sec 0^\circ = \frac{OM}{OM} = 1.$$

Въ первой четверти (отъ 0° до 90°) OP положительное (§ 4) и уменьшается по мѣрѣ движенья OM отъ OA къ OB , т. е. съ увеличенемъ угла AOM ; следовательно, секансы для угловъ между 0° и 90° увеличиваются съ увеличенемъ угла; когда же OM совпадетъ съ OB , то $OP = 0$, уголъ $AOM = 90^\circ$ и

$$\sec 90^\circ = \frac{OB}{0} = \infty.$$

Прямая OM , двигаясь во второй четверти (отъ 90° до 180°), будетъ приближаться къ OC ; OP здѣсь отрицательное (§ 3), хотя абсолютная величина его будетъ возрастать по мѣрѣ увеличенія угла, слѣд. секансъ будетъ отрицательнымъ и абсолютная величина его будетъ уменьшаться съ увеличенемъ угла отъ 90° до 180° . Когда OM совпадетъ съ OC , то $OP = -OC = -OM$, уголъ $AOM = 180^\circ$ и

$$\sec 180^\circ = \frac{OM}{-OM} = -1.$$

Когда OM двигается въ третьей четверти (отъ 180° до 270°), то OP будетъ отрицательнымъ (§ 3) и абсолютная величина его уменьшается съ увеличенемъ угла; слѣдовательно, секансы для угловъ этой четверти будутъ отрицательными и абсолютная величина ихъ будетъ увеличиваться съ увеличенемъ угла; когда OM совпадетъ съ OD , то уголъ $AOM = 270^\circ$, $OP = 0$ и

$$\sec 270^\circ = \frac{OM}{-0} = -\infty.$$

Наконецъ, для угловъ четвертой четверти секансы будутъ положительно и они и будутъ уменьшаться по мѣрѣ приближенія OM къ OA ; когда же OM совпадетъ съ OA , то уголъ $AOM = 360^\circ$, $OP = OA = OM$ и слѣдовательно

$$\sec 360^\circ = \frac{OM}{OM} = 1.$$

Предложимъ OM двигаться далѣе, въ томъ же направленіи и въ той же плоскости, увидимъ, что секансы будутъ измѣняться также, какъ и при первомъ вращеніи OM , и потому, означивъ уголъ буквою α , а всю круглую мѣру буквою β , получимъ:

$\sec(\alpha + 4n\pi) = \sec(\alpha + 2n \cdot 180^\circ) = \sec \alpha$ или $\sec(\beta + 2n\pi) = \sec \beta$,
гдѣ n цѣлое, положительное или отрицательное число.

§ 27. *Измененія косекансы* (фиг. 15). Поступая также, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, увидимъ, что косекансы для угловъ первой и второй четверти будутъ положительными, а для угловъ третьей и четвертой четвертей — отрицательными и что $\operatorname{cosec} 0^\circ = \infty$, $\operatorname{cosec} 90^\circ = 1$, $\operatorname{cosec} 180^\circ = \infty$, $\operatorname{cosec} 270^\circ = -1$, $\operatorname{cosec} 360^\circ = \infty$ и $\operatorname{cosec}(\alpha + 4n\pi) = \operatorname{cosec}(\alpha + 2n \cdot 180^\circ) = \operatorname{cosec} \alpha$ или $\operatorname{cosec}(\beta + 2n\pi) = \operatorname{cosec} \beta$, гдѣ n цѣлое, положительное или отрицательное число.

§ 28. Въ предыдущие результаты соединимъ вмѣстѣ и получимъ таблицу:

Тригоном. величины	Въ 1-й четвер		Во 2-й четвер		Въ 3-й четвер		Въ 4-й четвер		
	0°	90°	90°	180°	180°	270°	270°	360°	
sin	0 (+) 1	1 (+) 0	0 (-) 1	1 (-) 0	0 (-) 1	-1 (-) 0	0 (+) 1	1 (+) 0	
cos	1 (+) 0	0 (-) 1	0 (-) 1	-1 (-) 0	-1 (-) 0	0 (+) 1	0 (+) 1	1 (+) 0	
tg	0 (+) ∞	∞ (-) 0	∞ (-) 0	0 (+) ∞	0 (+) ∞	∞ (-) 0	∞ (-) 0	0 (+) ∞	∞ (-) 0
ctg	∞ (+) 0	0 (-) ∞	0 (-) ∞	∞ (+) 0	∞ (+) 0	0 (-) ∞	0 (-) ∞	∞ (+) 0	∞ (+) 0
sec	1 (+) ∞	∞ (-) 1	∞ (-) 1	-1 (-) ∞	-1 (-) ∞	∞ (+) 1	∞ (+) 1	1 (+) ∞	∞ (+) 1
cosec	∞ (+) 1	1 (+) ∞	1 (+) ∞	∞ (-) 1	∞ (-) 1	-1 (-) ∞	-1 (-) ∞	∞ (+) 1	∞ (+) 1

§ 29. На основаніи предыдущихъ изслѣдованій измѣненій тригонометрическихъ величинъ при измѣненіи угла, легко построить уголъ, когда дана его тригонометрическая величина.

Примѣръ I. Построить наименьшій изъ угловъ, которая синусъ равенъ $\frac{3}{4}$. Намъ извѣстно (§ 16), что синусъ угла есть отноше-

Фиг. 16.

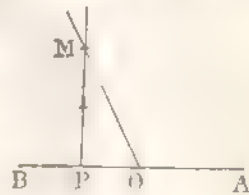


ніе перпендикуляра къ наклонной и что синусы будутъ положительными для угловъ первой четверти; поэтому, принявъ какую либо длину за единицу мѣры, построимъ прямоугольный треугольникъ ABC' , въ которомъ катетъ BC' равенъ 3 единицамъ синуса, а гипотенуза AC' равна 4 такимъ же единицамъ, тогда уголъ A , противолежащій катету BC' будетъ искомымъ.

Примѣръ II. Построить наименьшій изъ угловъ, которая тангенсъ равенъ $\frac{3}{2}$. Тангенсъ угла (§ 16) есть отношеніе перпенди-

будетъ проеци наклонной и будетъ отрицательнымъ во второй четверти. Поэтому, принявъ какую либо опредѣленную прямую за единицу мѣры длины, отложимъ на произвольной прямой AB часть OP , равную единицѣ мѣры длины, и изъ точки P возставимъ перпендикуляръ, на кот. отложимъ отъ точки P часть PM равную 2 такимъ единицамъ. Соединивъ точку O съ M , получимъ искомый уголъ MOA .

Фиг. 17.



§ 30. **Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ для отрицательнаго угла.** Пусть данъ уголъ ABC - α . Внизъ отъ прямой AB построимъ уголъ ABD , равный углу

ABC ; тогда уголъ ABD , имѣя положеніе обратное относительно угла ABC , выразится (§ 6) числомъ $-\alpha$. Чтобы вывести зависимость между тригонометрическими величинами угловъ α и $-\alpha$, возьмемъ на прямой BD произвольную точку N и опустимъ перпендикуляръ NP на AB или ея продолженіе; перпендикуляръ NP продолжимъ до встрѣчи съ прямою BC въ точкѣ M . Прямоугольные треугольники BPM и BNP будутъ равны, потому что въ нихъ катетъ BP есть общій, а $\sphericalangle NBP = \sphericalangle MBP$, по отложенію; отсюда слѣдуетъ, что $NP = MP$ и $BN = BM$. По опредѣленію (§ 16):

Фиг. 18.



$$\sin(-\alpha) = \frac{NP}{BN}, \quad \text{а} \quad \sin \alpha = \frac{MP}{BM};$$

такъ какъ $BM = BN$, а NP и MP численно равны, но съ противоположными знаками, и потому

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$$

т. е. синусъ отрицательнаго угла равенъ отрицат. синусу положительнаго угла, имѣющему ту же абсолютную величину.

Точно также

$$\cos(-\alpha) = \frac{BP}{BN} \quad \text{и} \quad \cos \alpha = \frac{BP}{BM};$$

но $BN = BM$ и потому

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha;$$

Слѣдов. косинусъ отрицательнаго угла равенъ косинусу положительнаго угла, имѣющаго ту же абсолютную величину.

Также

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(-\alpha) &= \frac{NP}{BP}, \text{ а } \operatorname{tg} \alpha = \frac{MP}{BP}; \\ \operatorname{ctg}(-\alpha) &= \frac{BP}{NP}, \text{ а } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{BP}{MP}; \\ \operatorname{sec}(-\alpha) &= \frac{BN}{BP}, \text{ а } \operatorname{sec} \alpha = \frac{BM}{BP}; \\ \operatorname{cosec}(-\alpha) &= \frac{BN}{NP}, \text{ а } \operatorname{cosec} \alpha = \frac{BM}{MP}. \end{aligned}$$

Здѣсь NP и MP численно равны, но съ противоположными знаками, а $BM = BN$ и потому

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha, \\ \operatorname{sec}(-\alpha) &= \operatorname{sec} \alpha \text{ и } \operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec} \alpha. \end{aligned}$$

Найденныя формулы справедливы для всѣхъ значений угла α , что не трудно видѣть изъ чертежа. Если означимъ круговую мѣру угла α буквою ϑ , то найдемъ:

$$\begin{aligned} \sin(-\vartheta) &= -\sin \vartheta, \quad \cos(-\vartheta) = \cos \vartheta, \quad \operatorname{tg}(-\vartheta) = -\operatorname{tg} \vartheta, \\ \operatorname{ctg}(-\vartheta) &= -\operatorname{ctg} \vartheta, \quad \operatorname{sec}(-\vartheta) = \operatorname{sec} \vartheta \text{ и } \operatorname{cosec}(-\vartheta) = -\operatorname{cosec} \vartheta. \end{aligned}$$

Примѣръ I. Найти $\cos(-45^\circ)$. Извѣстно, что $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, и потому $\cos(-45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

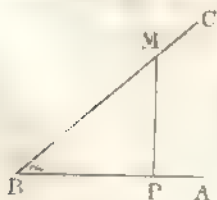
Примѣръ II. Определить $\sin -270^\circ$. Въ § 22 нашли, что $\sin 270^\circ = -1$, а потому $\sin -270^\circ = 1$.

Примѣръ III. Найти $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Получимъ: $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -\operatorname{tg} 45^\circ$ (§ 19) $= -1$.

§ 31. Отношенія между тригонометрическими величинами для одного и того же угла. Возьмемъ какой нибудь уголъ ABC' и означимъ его буквою α ; изъ точки M , взятой на BC' , опустимъ перпендикуляръ MP на сторону AB . Имѣемъ (§ 16):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MP}{BP};$$

раздѣливъ числителя и знаменателя этой дроби на BM , получимъ:



Фиг. 19.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MP : BM}{BP : BM};$$

и $MP : BM = \sin \alpha$, $BP : BM = \cos \alpha$ и потому

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad (1)$$

т. е. тангенс угла равен синусу этого угла, деленному на косинус того же угла.

Также

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MP}{BP} = \frac{MP : MP}{BP : MP} \text{ или } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}, \quad (2)$$

и следов. тангенс угла равняется единице, деленной на котангенс того же угла; отсюда обратно

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad (3)$$

т. е. котангенс угла равен единице, деленной на тангенс того же угла.

Имѣемъ:

$$\sec \alpha = \frac{BM}{BP} = \frac{BM : BM}{BP : BM} \text{ или } \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad (5)$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{BM}{MP} = \frac{BM : BM}{MP : BM} \text{ или } \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad (6)$$

т. е. секанс угла равен единице, деленной на косинус того же угла, а косеканс угла равен единице, деленной на синус того же угла.

Изъ прямоугольнаго треугольника BMP имѣемъ:

$$MP^2 + BP^2 = BM^2$$

или, раздѣливъ все члены этого равенства на BM^2 , найдемъ:

$$\left(\frac{MP}{BM}\right)^2 + \left(\frac{BP}{BM}\right)^2 = 1 \text{ или } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad (7)$$

т. е. квадратъ синуса сложенаго съ квадратомъ косинуса того же угла равенъ единице.

Изъ (7) формулы выходитъ, что

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \text{ или } \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\text{и } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \text{ или } \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha},$$

т. е. знакъ + или - передъ корнемъ ставимъ, смотря потому какой четверти принадлежитъ уголъ α (§§ 22 и 23)

Раздѣливъ все члены равенства: $MP^2 + BP^2 = BM^2$ на BP^2 , получимъ:

$$\left(\frac{MP}{BP} + 1 = \frac{BM}{BP} \right)^2 \text{ или } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha, \quad (8)$$

т. е. квадратъ секанса угла равенъ 1 сложенной съ квадратомъ тангенса того же угла.

Наконецъ, раздѣливши все члены равенства: $MP^2 + BP^2 = BM^2$ на MP^2 , найдемъ:

$$1 + \left(\frac{BP}{MP} \right)^2 = \left(\frac{BM}{MP} \right)^2 \text{ или } 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha, \quad (9)$$

слѣд. квадратъ косеканса угла равенъ единицы, сложенной съ квадратомъ котангенса того же угла.

§ 32. Полученныя девять формулъ вмѣстѣ съ равенствами $\operatorname{vers} \alpha = 1 - \cos \alpha$ и $\operatorname{covers} \alpha = 1 - \sin \alpha$ даютъ возможность опредѣлить все тригонометрическия величины для какого-либо угла, когда извѣстна одна изъ нихъ.

Примѣръ I. Опредѣлить тригонометрическия величины для угла α по $\sin \alpha$.

Найдемъ:

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}; \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}};$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}; \quad \operatorname{vers} \alpha = 1 - \cos \alpha = 1 \mp \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \text{ и } \operatorname{covers} \alpha = 1 - \sin \alpha.$$

Примѣръ II. Опредѣлить тригонометрическия величины для угла α по $\operatorname{tg} \alpha$.

Найдемъ:

$$\sin \alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = 1; \pm \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}} =$$

$$-1; \pm \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha} = \pm \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}};$$

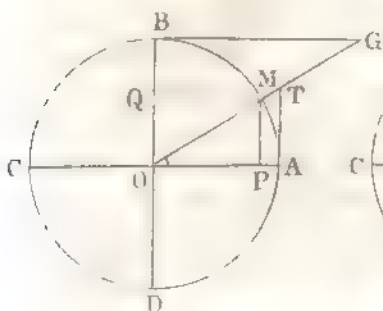
$$\cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}; \quad \sec \alpha = \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\text{и } \operatorname{cosec} \alpha = \pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \pm \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

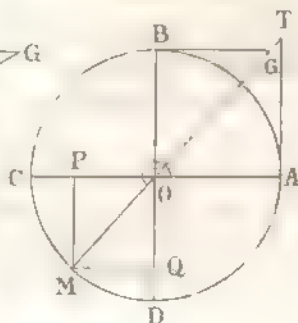
§ 33. Если угол α меньше половины прямого угла, то $\cos \alpha$ больше $\sin \alpha$. Пусть угол ABC (фиг. 19) меньше 45° , тогда въ прямоугольномъ треугольникѣ BMP : $\angle MBP + \angle BMP = 90^\circ$; но $\angle MBP = 45^\circ$, а потому $\angle BMP > 45^\circ$; следовательно $BP > MP$ или $BP > MP$. Отношеніе $\frac{BP}{BM} = \cos \alpha$, а отношеніе $\frac{MP}{BM} = \sin \alpha$; потому $\cos \alpha > \sin \alpha$. Если же уголъ α заключается между 45° и 90° , то легко показать, что $\cos \alpha < \sin \alpha$.

§ 34. Объ опредѣленіяхъ тригонометрическихъ величинъ. Опредѣленія тригонометрическихъ величинъ, данныя въ этомъ курсѣ, су-

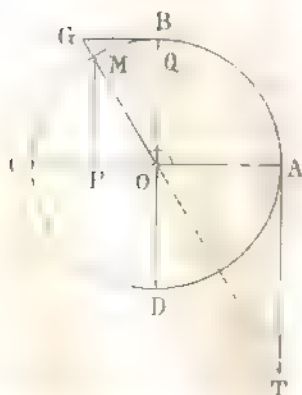
Фиг. 20.



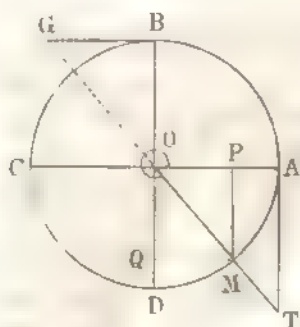
Фиг. 22.



Фиг. 21.



Фиг. 23.



ществіенно отличаются отъ опредѣленій, находящихся въ другихъ курсахъ тригонометріи. Въ этомъ параграфѣ мы познакоимъ чя-

тателя съ упомянутыми опредѣленіями тригонометрическихъ величинъ.

Опишемъ изъ точки O (фиг. 20, 21, 22 и 23) окружность произвольнымъ радіусомъ и проведемъ два взаимно-перпендикулярные діаметра AC и BD ; отъ точки A отложимъ какую-либо дугу AM и чрезъ точки O и M проведемъ прямую. Изъ точки M опустимъ перпендикуляръ MP на AC и черезъ точку A проведемъ касательную къ кругу, то встрѣчи, съ прямою OM въ точкѣ T ; также проведемъ касательную къ кругу чрезъ точку B до встрѣчи съ прямою OM въ точкѣ G .

Перпендикуляръ MP наз. *синусомъ* дуги AM ; OP наз. *косинусомъ* дуги AM ; AT — *тангенсомъ* дуги AM , BG — *котангенсомъ* дуги AM , OT — *секансомъ* дуги AM ; OG — *косекансомъ* дуги AM ; AP — *синусомъ-версисомъ* дуги AM и BQ — *косинусомъ-версисомъ* дуги AM . Отсюда видимъ, что синусъ, косинусъ, тангенсъ и т. д. означаютъ *длины линий*, между тѣмъ какъ теперь эти названія выражаютъ отношенія линий и что, при прежнихъ опредѣленіяхъ, величины \sin , \cos , tg и т. д. зависѣли отъ радіуса круга

§ 35. Легко найти формулы для перехода отъ \sin , \cos и т. д. при новомъ опредѣленіи къ величинамъ \sin , \cos и т. д. при старомъ опредѣленіи.

Въ самомъ дѣлѣ, по новому опредѣленію (§ 16):

$$\sin \angle AOM = \frac{MP}{OM}, \quad (1)$$

а по прежнему опредѣленію:

$$\sin \text{ дуги } AM = MP; \quad (2)$$

замѣнивъ въ (1) равенствѣ MP величиною его изъ (2) равенства, получимъ:

$$\sin \angle AOM = \frac{\sin \text{ дуги } AM}{OM}, \quad (3)$$

т. е. *синусъ угла равняется синусу дуги, раздѣленному на радіусъ дуги*.

Изъ (3) равенства также имѣемъ:

$$\sin \text{ дуги } AM = OM \cdot \sin \angle AOM,$$

т. е. *синусъ дуги равняется радіусу дуги, умноженному на синусъ угла*.

Такіе же результаты получатся и для всѣхъ другихъ тригонометрическихъ величинъ.

§ 36. Въ слѣдствіе найденныхъ отношеній между \sin , \cos , tg и ctg , опредѣленныхъ по новой и прежней системѣ, легко перейти отъ формулъ, выведенныхъ по новому опредѣленію тригонометрическихъ величинъ, къ формуламъ, гдѣ тригонометрическія величины опредѣляются по прежнему, и обратно. Напр. въ § 31 было найдено, что

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

гдѣ α означаетъ какой-либо уголъ.

Если означимъ буквою a дугу, соответствующую углу α и опи-санную радіусомъ r , то (§ 35)

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{r} \text{ и } \cos \alpha = \frac{\cos a}{r};$$

подставивъ эти величины $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ въ предъидущее равенство, найдемъ:

$$\frac{\sin^2 a}{r^2} + \frac{\cos^2 a}{r^2} = 1 \text{ или } \sin^2 a + \cos^2 a = r^2.$$

Точно также можно получить и другія формулы § 31.

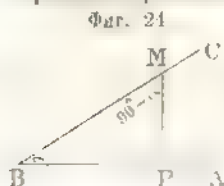
§ 37. Мы нашли, что синусъ дуги равенъ радіусу дуги, умноженному на синусъ угла, соответствующаго дугѣ; слѣдовательно, если *радіусъ дуги* примемъ за *синусъ*, то численныя величины синуса, а равно и другихъ тригонометрическихъ величинъ, будутъ одинаковы въ обѣихъ системахъ; отсюда видимъ, что всякая формула, выведенная при прежнемъ опредѣленіи тригонометрическихъ величинъ, можетъ быть превращена въ формулу при новыхъ опредѣленіяхъ, положивъ *радіусъ круга равнымъ синусу* *).

*) *Рheticus* (Rheticus), составившій позную тригонометрическую таблицу, упоминаетъ уже о томъ, что тригонометрическія величины суть собственно отношенія дугъ.

ОТДѢЛЪ II.

(Определение тригонометрическихъ величинъ для угловъ: $90^\circ - \alpha$, $90^\circ + \alpha$, $180^\circ - \alpha$, $180^\circ + \alpha$, $270^\circ - \alpha$, $270^\circ + \alpha$ и $360^\circ - \alpha$ по тригонометрическимъ величинамъ для угла α . Определение общаго выраженія для угловъ, имѣющихъ одинъ и тотъ же синусъ, косинусъ и т. д.)

§ 28. Определение тригонометрическихъ величинъ для угла $90^\circ - \alpha$ по тригонометрическимъ величинамъ для острого угла α . Начертимъ уголъ



$ABC = \alpha$ и изъ какой-нибудь точки M , взятой на сторонѣ BC , опустимъ перпендикуляръ MP на AB ; тогда уголъ BMP будетъ дополнительныи углу α . На основаніи опредѣленій тригонометрическихъ величинъ (§ 16), найдемъ для угла α :

$$\sin \alpha = \frac{MP}{BM}, \quad \cos \alpha = \frac{BP}{BM}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{MP}{BP},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{BP}{MP}, \quad \sec \alpha = \frac{BM}{BP} \text{ и } \operatorname{cosec} \alpha = \frac{BM}{MP};$$

для угла же $AMP = 90^\circ - \alpha$ имѣемъ:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{BP}{BM}, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{MP}{BM}, \quad \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{BP}{MP},$$

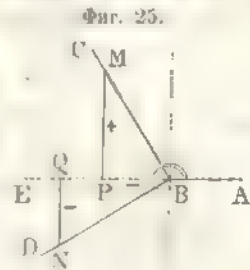
$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \frac{MP}{BP}, \quad \sec(90^\circ - \alpha) = \frac{BM}{MP} \text{ и } \operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha) = \frac{BM}{BP}.$$

Изъ сравненія написанныхъ отношеній, получимъ:

$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$; $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$; $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$;
 $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$; $\sec \alpha = \operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha)$ и $\operatorname{cosec} \alpha = \sec(90^\circ - \alpha)$,
 т. е. синусъ даннаго угла равняется косинусу угла ему дополнительнаго;
 косинусъ даннаго угла равняется синусу угла ему дополнительнаго;
 тангенсъ даннаго угла равняется котангенсу угла ему дополнительнаго;
 котангенсъ даннаго угла равняется тангенсу угла ему дополнительнаго;
 секансъ даннаго угла равняется косекансу угла ему дополнительнаго и
 косекансъ даннаго угла равняется секансу угла ему дополнительнаго. Напр. $\sin 16^\circ 18' = \cos 73^\circ 42'$; $\operatorname{ctg} 59^\circ 4' 36'' = \operatorname{tg} 30^\circ 55' 24''$;

$$\sin 60^\circ = \cos 60^\circ (\S 20) \quad \therefore \cos 30^\circ = \sin 60^\circ (\S 20) \quad \frac{\sqrt{3}}{2}; \operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ (\S 20) = \sqrt{1/3}.$$

§ 39. Определение тригонометрических величинъ для угла $90^\circ + \alpha$ по тригонометрическимъ величинамъ угла α . Возьмемъ уголь ABC и изъ точки B поставимъ перпендикуляръ BD къ BC' тогда получимъ уголь ABD , и если уголь ABC означимъ буквою α , то уголь ABD считаемый въ ту же сторону, будетъ $90^\circ + \alpha$. На сторонахъ BC и BD отложимъ равныя части: BM и BN и изъ точекъ M и N опустимъ перпендикуляры MP и NQ на сторону AB или ее продолженіе. Прямоугольные треугольнички BPM и BNQ будутъ равны, потому что гипотенузы BM и BN равны, по условию, а острые углы MBP и BNQ равны, какъ съ перпендикулярными сторонами; отсюда видимъ, что $BP = NQ$ и $MP = BQ$. По опредѣленію (§ 16):



Фиг. 25.

$$\sin ABD = \sin(90^\circ + \alpha) = \frac{NQ}{BN} \text{ и } \cos ABC = \cos \alpha = \frac{BM}{BN},$$

т. е. $BM = BN \cdot \cos \alpha$, а NQ и BP численно равны и съ одинаковыми знаками; поэтому

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha.$$

Также

$$\cos ABD = \cos(90^\circ + \alpha) = \frac{BP}{BN} \text{ и } \sin ABC = \sin \alpha = \frac{MP}{BM},$$

т. е. BP и MP численно равны и съ обратными знаками, а $BN = BM \cdot \cos \alpha$ и потому

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha.$$

Итакъ

$$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\cos(90^\circ + \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha;$$

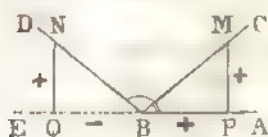
$$\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = \frac{\cos(90^\circ + \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha;$$

$$\operatorname{sec}(90^\circ + \alpha) = \operatorname{cosec} \alpha \text{ и } \operatorname{cosec}(90^\circ + \alpha) = \sec \alpha.$$

Примѣръ. Нанти $\operatorname{ctg}^2 \frac{3}{4} \pi$. Получимъ $\operatorname{ctg}^2 \frac{3}{4} \pi = \operatorname{ctg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 30^\circ$

§ 40. Определение тригонометрических величин для угла $180^\circ - \alpha$ по тригонометрическим величинам для угла α . Возьмем угол

Фиг. 26.



$ABC = \alpha$ и, продолжив линию AB , отложим угол FBD , равный углу ABC ; тогда угол $ABD = 180^\circ - \alpha$. На сторонах BC и BD отложим равные части BQ и BN и из точек M и N опустим перпендикуляры MP и NQ на прямую AE ; полученные треугольники BPM и BQN будут равны, потому что у них гипотенузы BM и BN равны, по отложению, и также угол PBM равен углу QBN ; отсюда видим, что $BP = BQ$ и $MP = NQ$.

По определению (§ 16), имеем:

$$\sin ABD = \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{NQ}{BN} \text{ и } \sin ABC = \sin \alpha = \frac{MP}{BM};$$

здесь MP и NQ равны по величине и имеют одинаковые знаки, а потому

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha,$$

т. е. синус данного угла равен синусу угла ему дополнительного до двух прямых.

Также

$$\cos ABD = \cos(180^\circ - \alpha) = \frac{BQ}{BN} \text{ и } \cos ABC = \cos \alpha = \frac{BP}{BM};$$

но BP и BQ равны и имеют противные знаки, а потому

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha,$$

т. е. косинус данного угла равен минус косинусу угла дополнительного ему до двух прямых.

Также

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha,$$

т. е. тангенс данного угла равен минус тангенсу угла дополнительного ему до двух прямых.

Также

$$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\cos(180^\circ - \alpha)}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\operatorname{sec}(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{1}{-\cos \alpha} = -\operatorname{sec} \alpha$$

$$\text{и } \operatorname{cosec}(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{1}{\sin \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha.$$

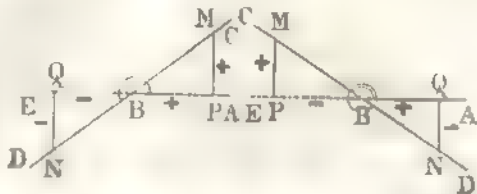
На основаніи § 22 можемъ написать, что

$$\sin [(2n + 1) 180^\circ - \alpha] = \sin \alpha.$$

Примѣръ I. Опредѣлить $\operatorname{tg} 120^\circ$, получимъ: $\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ$ (§ 20) = $-\sqrt{3}$.

Примѣръ II. Опредѣлить $\cos^5 \frac{5}{6} \pi$; получимъ: $\cos^5 \frac{5}{6} \pi = \cos^1 \frac{5}{6} \pi$ (§ 18) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

§ 41. Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ для угла $180^\circ + \alpha$ по тригонометрическимъ величинамъ для угла α . Начертимъ уголь $ABC = \alpha$ и продолжимъ сторону CB ; тогда найдемъ уголь $ABD = 180^\circ + \angle ABC = 180^\circ + \alpha$. На сторонахъ BC и BD отложимъ равныя части BM и BN и изъ точекъ M и N опустимъ перпендикуляры MP и NQ на прямую AE ; полученные треугольнички BPM и BQN будутъ равны по всѣмъ сходственнымъ частямъ. По опредѣленію (§ 16), имѣемъ:



По опредѣленію (§ 16), имѣемъ:

$$\sin ABD = \sin (180^\circ + \alpha) = -\frac{NQ}{BN} \text{ и } \sin ABC = \sin \alpha = \frac{MP}{BM};$$

NQ и MP численно равны, но съ противными знаками, а $BM = BN$; поэтому

$$\sin (180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha.$$

Также

$$\cos ABD = \cos (180^\circ + \alpha) = \frac{BQ}{BN} \text{ и } \cos ABC = \cos \alpha = \frac{BP}{BM};$$

BP и BQ численно равны и имѣютъ положеніе обратное, а потому

$$\cos (180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha.$$

Также

$$\operatorname{tg} (180^\circ + \alpha) = \frac{\sin (180^\circ + \alpha)}{\cos (180^\circ + \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\operatorname{ctg} (180^\circ + \alpha) = \frac{\cos (180^\circ + \alpha)}{\sin (180^\circ + \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\sec (180^\circ + \alpha) = \frac{1}{\cos (180^\circ + \alpha)} = \frac{1}{-\cos \alpha} = -\sec \alpha$$

$$\text{и } \operatorname{cosec} (180^\circ + \alpha) = \frac{1}{\sin (180^\circ + \alpha)} = \frac{1}{-\sin \alpha} = -\operatorname{cosec} \alpha.$$

§ 42. Найденныя формулы справедливы для всехъ значений угла α , что видно непосредственно изъ чертежа. Но впрочемъ эти формулы, также какъ и формулы §§ 38, 39 и 40, можно подтвердить, давая углу α частныя значенія; такъ напр., если желаемъ показать, что равенство

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha.$$

справедливо для $\alpha = 180^\circ + \beta$, гдѣ $\beta < 90^\circ$ и > 0 , то для этого подставимъ отдѣльно въ обѣ части равенства $180^\circ + \beta$ вмѣсто α и получимъ:

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ + \alpha) &= \sin(180^\circ + 180^\circ + \beta) = \sin(360^\circ + \beta) = \sin \beta \\ \text{и} \quad \sin \alpha &= \sin(180^\circ + \beta) = -\sin \beta \end{aligned}$$

Слѣдовательно, отъ обѣихъ частей равенства получили по $\sin \beta$, что показываетъ справедливость равенства: $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ для даннаго значенія угла α . Тоже самое получимъ и для другихъ значений угла α .

Примѣръ I. Опредѣлить $\sin 225^\circ$, получимъ $\sin 225^\circ = \sin 45^\circ$ (§ 19) $= -\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Примѣръ II. Опредѣлить $\cos \frac{1}{3}\pi$, получимъ: $\cos \frac{1}{3}\pi = \cos \frac{1}{4}\pi = -\cos 60^\circ$ (§ 20) $= -\frac{1}{2}$.

§ 43. Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ для угла $270^\circ \pm \alpha$ по тригонометрическимъ величинамъ для угла α

Замѣтивъ, что $270^\circ = 180^\circ + 90^\circ$, получимъ:

$$\begin{aligned} \sin(270^\circ - \alpha) &= \sin[180^\circ + (90^\circ - \alpha)] \text{ (§ 41)} = -\sin(90^\circ - \alpha) = \\ &= -\cos \alpha. \end{aligned}$$

Также найдемъ, что

$$\begin{aligned} \cos(270^\circ - \alpha) &= -\sin \alpha, \quad \sin(270^\circ + \alpha) = -\cos \alpha, \quad \cos(270^\circ + \alpha) = \\ &= \sin \alpha, \quad \operatorname{tg}(270^\circ \pm \alpha) = \mp \operatorname{ctg} \alpha \text{ и } \operatorname{ctg}(270^\circ \pm \alpha) = \mp \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Эти формулы можно найти прямо изъ чертежа подобно тому, какъ дѣлали въ §§ 38—41.

Примѣръ. Опред. $\sin 300^\circ$; получимъ: $\sin 300^\circ = \cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

§ 44. Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ для угла $360^\circ - \alpha$ по тригонометрическимъ величинамъ для угла α . Зная, что уменьшивъ или увеличивъ уголь на 360° , тригонометрическія величины угловъ не мѣняются, получимъ (§ 30):

$$\begin{aligned} \sin(360^\circ - \alpha) &= \sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(360^\circ - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha; \\ \operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha; \quad \operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

§ 45. Опредѣленіе общаго выраженія для угловъ, имѣющихъ одинъ и тотъ же синусъ, косинусъ и т. д. Мы представимъ здѣсь подробно общаго выраженія только для угловъ, имѣющихъ тотъ же синусъ, а для остальныхъ тригонометрическихъ величинъ дадимъ окончательные выводы, такъ какъ ходъ разсужденій для нихъ всѣхъ будетъ одинъ и тотъ же. Пусть α будетъ одинъ изъ угловъ, которыхъ дасть синусъ; тогда (§ 22) тотъ же самый синусъ будутъ имѣть углы, равные $2n \cdot 180^\circ + \alpha$, гдѣ n цѣлое, положительное или отрицательное число; этотъ же самый синусъ (§ 40) будутъ имѣть углы, равные $(2n + 1)180^\circ - \alpha$, гдѣ n цѣлое, положительное или отрицательное число. Формулы $2n \cdot 180^\circ + \alpha$ и $(2n + 1)180^\circ - \alpha$ можно соединить въ одну, написавъ ихъ такъ:

$$n \cdot 180^\circ + (-1)^n \alpha,$$

гдѣ n цѣлое, положительное или отрицательное число.

Слѣдовательно, общее выраженіе для угловъ, имѣющихъ тотъ же синусъ, будетъ: $n \cdot 180^\circ + (-1)^n \alpha$, гдѣ n цѣлое число, а α данный уголъ.

Точно также, если означимъ буквою α одинъ изъ угловъ, имѣющихъ ту же тригонометрическую величину, а чрезъ n какое либо цѣлое число, то получимъ общее выраженіе для угловъ, имѣющихъ тотъ же

- 1) косинусъ.... $2n \cdot 180^\circ \pm \alpha$; 2) тангенсъ... $n \cdot 180^\circ + \alpha$;
- 3) котангенсъ... $n \cdot 180^\circ + \alpha$; 4) секансъ.... $2n \cdot 180^\circ \pm \alpha$ и
- 5) косекансъ..... $n \cdot 180^\circ + (-1)^n \alpha$.

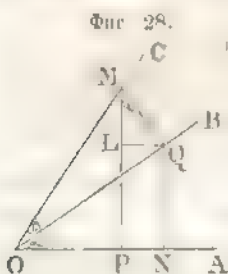
Примѣръ I. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. Найти общее выраженіе для угла α . Такъ какъ $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ (§ 20), то общее выраженіе для угла α есть $2n \cdot 180^\circ \pm 60^\circ$.

Примѣръ II. Найти общее выраженіе для угла α , когда $\operatorname{tg} \alpha = 1$. Некое рѣшеніе: $\alpha = n \cdot 180^\circ + 45^\circ$.

ОТДѢЛЪ III.

Определение тригонометрическихъ величинъ для суммы и разности двухъ и больше угловъ. — Определение тригонометрическихъ величинъ для угловъ, кратныхъ данному. — Определение тригонометрическихъ величинъ для угловъ, составляющихъ половину, четверть и т. д. данного угла. — Определение косинуса и синуса трети угла, зная косинусъ и синусъ цѣлаго угла.

§ 46. Определение синуса и косинуса суммы двухъ данныхъ угловъ въ зависимости отъ синуса и косинуса данныхъ угловъ. (Значимъ



уголъ AOB буквою α , а уголъ BOC буквою β ; тогда уголъ $AOC = \alpha + \beta$.

Возьмемъ на OC какую нибудь точку M и изъ нея опустимъ перпендикуляръ MP на OA и MQ на OB , изъ точки Q опустимъ перпендикуляръ QN на OA и QL на MP . Замѣтимъ также, что уголъ LMQ равенъ углу α , потому что стороны этихъ угловъ соответственно перпендикулярны къ оба угла острые. По опредѣленію (§ 16):

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{MP}{OM} = \frac{PL}{OM} + \frac{ML}{OM} = \frac{QN}{OM} + \frac{ML}{OM};$$

въ первомъ отношеніи, QN и OM суть стороны прямоугольныхъ треугольниковъ ONQ и OMQ , у кот. общая сторона есть OQ , и потому числителя и знаменателя перваго отношенія умножимъ на OQ ; во второмъ отношеніи, ML и OM суть стороны прямоугольныхъ треугольниковъ MLQ и OMQ , у кот. общая сторона есть MQ , а потому числителя и знаменателя втораго отношенія умножимъ на MQ . Найдемъ:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{QN}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OM} + \frac{ML}{MQ} \cdot \frac{MQ}{OM};$$

но (§ 16) $\frac{QN}{OQ} = \sin \alpha$, $\frac{OQ}{OM} = \cos \beta$, $\frac{ML}{MQ} = \cos \alpha$, $\frac{MQ}{OM} = \sin \beta$ и потому

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad (1)$$

в синусъ суммы двухъ угловъ равенъ суммѣ произведеній синуса перваго угла на косинусъ втораго и косинуса перваго на синусъ втораго угла.

Также

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{OP}{OM} = \frac{ON - QL}{OM} = \frac{ON}{OM} - \frac{QL}{OM} =$$

$$= \frac{ON}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OM} - \frac{QL}{MQ} \cdot \frac{MQ}{OM},$$

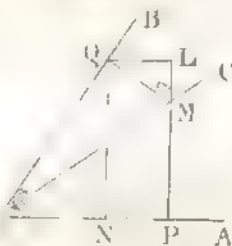
по (§ 16) $\frac{ON}{OQ} = \cos \alpha$, $\frac{OQ}{OM} = \cos \beta$, $\frac{QL}{MQ} = \sin \alpha$ и $\frac{MQ}{OM} = \sin \beta$, а потому

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (2)$$

т. е. косинусъ суммы двухъ угловъ равенъ разности произведеній косинусовъ и синусовъ данныхъ угловъ.

§ 47. **Опредѣленіе синуса и косинуса разности двухъ угловъ по синусу и косинусу данныхъ угловъ.** (Означимъ уголъ AOB буквою α и уголъ BOC буквою β ; тогда уголъ $AOB' = \alpha - \beta$. Изъ какой нибудь точки M , взятой на OC' , опустимъ перпендикуляръ MP на OA и MQ на OB ; также опустимъ перпендикуляръ QN на OA и QL на продолженіе линии PM . Углы QML и AOB будутъ равны, какъ съ перпендикулярными сторонами и при томъ оба угла острые. Но опредѣлешю (§ 16):

Фиг. 29.



$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{MP}{OM} = \frac{PL - ML}{OM} = \frac{QN}{OM} - \frac{ML}{OM} = \frac{QN}{OM} - \frac{ML}{OM} =$$

$$= \frac{QN}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OM} - \frac{ML}{MQ} \cdot \frac{MQ}{OM},$$

по $\frac{QN}{OQ} = \sin \alpha$, $\frac{OQ}{OM} = \cos \beta$, $\frac{ML}{MQ} = \cos \alpha$ и $\frac{MQ}{OM} = \sin \beta$, а потому

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \quad (3)$$

т. е. синусъ разности двухъ угловъ равенъ разности произведеній синуса перваго угла на косинусъ втораго и косинуса перваго угла на синусъ втораго.

Также

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \frac{OP}{OM} = \frac{ON + QL}{OM} = \frac{ON}{OM} + \frac{QL}{OM} = \\ &= \frac{ON}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OM} + \frac{QL}{MQ} \cdot \frac{MQ}{OM}\end{aligned}$$

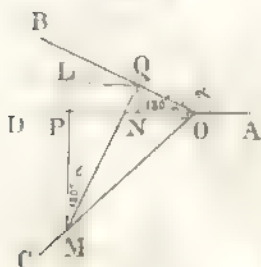
но $\frac{ON}{OQ} = \cos \alpha$, $\frac{OQ}{OM} = \cos \beta$, $\frac{QL}{MQ} = \sin \alpha$ и $\frac{MQ}{OM} = \sin \beta$, а потому

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta, \quad (4)$$

т. е. косинус разности двух углов равен сумме произведений косинусов и синусов данных углов.

§ 48. Найденныя (1), (2), (3) и (4) формулы справедливы для всех значений углов α и β ; въ этомъ можно убѣдиться, произведи, на самомъ дѣлѣ, выводъ предыдущихъ формулъ при другихъ значенияхъ α и β ; построение будетъ всегдѣ одно и тоже, а при выводахъ придется иногда брать вмѣсто даннаго угла другой, находящійся въ извѣстной зависимости отъ даннаго. Для примѣра выведемъ формулу для $\sin(\alpha - \beta)$, гдѣ $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, а $0^\circ < \beta < 90^\circ$.

Фиг. 30.



Пусть уголъ AOB будетъ α , а уголъ BOC будетъ β ; тогда уголъ $AOC = \alpha + \beta$. Изъ какой нибудь точки M лини OC опустимъ перпендикуляръ MP на продолженн лини OA и перпендикуляръ MQ на OB ; изъ точки Q опустимъ перпендик. QN и QL на продолженн лини AO и MP . Уголъ $QML = BOC = 180^\circ - \alpha$.

По опредѣленію (§§ 22, 40):

$$\begin{aligned}-\sin(\alpha + \beta) &= \frac{MP}{OM} = \frac{ML + QN}{OM} = \frac{ML}{OM} + \frac{QN}{OM} = \\ &= \frac{ML}{MQ} \cdot \frac{MQ}{OM} + \frac{QN}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OM};\end{aligned}$$

но $\frac{ML}{MQ} = \cos QML = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, $\frac{MQ}{OM} = \sin \beta$,

$\frac{QN}{OQ} = \sin EOD = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ и $\frac{OQ}{OM} = \cos \beta$;

сѣловательно,

$$-\sin(\alpha + \beta) = -\cos\alpha \cdot \sin\beta - \sin\alpha \cos\beta$$

или перемѣнивъ во всѣхъ членахъ знаки на обратные, найдемъ:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta,$$

одинаковую съ полученною въ § 46.

§ 49. Формулы §§ 46 и 47 справедливы и когда $\beta > \alpha$. Въ самомъ дѣлѣ, если $\beta > \alpha$, то (§ 30)

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= -\sin(\beta - \alpha) = -(\sin\beta \cos\alpha - \cos\beta \sin\alpha) \\ &= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta, \end{aligned}$$

$$\text{а } \cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta.$$

§ 50. Формулы §§ 46 и 47 справедливы и въ томъ случаѣ, когда одинъ изъ угловъ α и β или оба угла будутъ отрицательные. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что $\alpha = -a$ и $\beta = -b$ и повѣримъ одну изъ предыдущихъ формулъ, напр. формулу для $\sin(\alpha - \beta)$; поставимъ въ ней $-a$ вмѣсто α и $-b$ вмѣсто β и найдемъ:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin(-a + b) = \sin(b - a) = \sin b \cos a - \cos b \sin a \\ \text{по } a &= -\alpha, b = -\beta, \text{ а потому (§ 30) } \sin b = \sin(-\beta) = -\sin\beta, \\ \cos a &= \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \cos b = \cos(-\beta) = \cos\beta, \sin a = \sin(-\alpha) = \\ &= -\sin\alpha \text{ и слѣдовательно,} \end{aligned}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = -\sin\beta \cos\alpha - (\cos\beta \cdot -\sin\alpha) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta.$$

Замѣчаніе. Сравнивая (§§ 46, 47) формулу (1) съ (3) и (2) съ (4), видимъ, что (2) и (4) формулы могутъ быть получены изъ (1) и (3), поставивъ въ нихъ $-\beta$ вмѣсто β .

Справедливость (1), (2), (3) и (4) формулъ (§§ 46, 47) для всѣхъ значеній α и β можно показать, не прибѣгая къ чертежу. Напримѣръ, если желаемъ повѣрить (1) формулу, когда $\alpha > 180^\circ$ и $< 270^\circ$, а $\beta > 90^\circ$ и $< 180^\circ$, то, положивъ $\alpha = 180^\circ + a$, гдѣ $a < 90^\circ$ и $\beta = 180^\circ - b$, гдѣ $b < 90^\circ$, найдемъ:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(180^\circ + a + 180^\circ - b) = \sin(360^\circ + a - b) \\ &= \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b; \end{aligned}$$

по такъ какъ $a = \alpha - 180^\circ$, $b = 180^\circ - \beta$, то поэтому $\sin a = \sin(\alpha - 180^\circ) = -\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$, $\cos b = \cos(180^\circ - \beta) = -\cos\beta$, $\cos a = \cos(\alpha - 180^\circ) = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ и $\sin b = \sin(180^\circ - \beta) = \sin\beta$. Слѣдов. $\sin(\alpha + \beta) = (-\sin\alpha)(-\cos\beta) - (-\cos\alpha)\sin\beta = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$.

Примѣръ. Опредѣлить тригонометрическія величины для угловъ въ 75° и 15° .

Имѣемъ:

$$\sin 75^\circ = \sin (45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}};$$

$$\cos 75^\circ = \cos (45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}};$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = 2 + \sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg} 75^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 75^\circ} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = 2 - \sqrt{3};$$

$$\operatorname{sec} 75^\circ = \frac{1}{\cos 75^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1);$$

$$\operatorname{cosec} 75^\circ = \frac{1}{\sin 75^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1);$$

$$\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}; \quad \cos 15^\circ = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}};$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{ctg} 75^\circ = 2 - \sqrt{3}; \quad \operatorname{ctg} 15^\circ = \operatorname{tg} 75^\circ = 2 + \sqrt{3};$$

$$\operatorname{sec} 15^\circ = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) \quad \text{и} \quad \operatorname{cosec} 15^\circ = \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1).$$

§ 51. Опредѣленіе тангенса для суммы и разности двухъ угловъ.
Извѣстно, что

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos (\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta};$$

раздѣливъ числителя и знаменателя дроби на $\cos \alpha \cos \beta$, получимъ:

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}$$

или

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad (5)$$

т. е. тангенсъ суммы двухъ угловъ равенъ суммѣ тангенсовъ этихъ угловъ, дѣленной на разность между 1 и произведеніемъ тангенсовъ данныхъ угловъ.

Точно также найдемъ:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (6)$$

Изъ полученныхъ равенствъ вывѣдъ уловъ равенствъ тангенсовъ вычитать уловъ, тѣмъ же на сумму 1 съ произведениемъ тангенсовъ относить уловъ.

Примѣръ. Опредѣлить $\operatorname{tg}(\alpha \pm 45^\circ)$. Имѣемъ:

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} 45^\circ}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm 1}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha}$$

§ 52. Опредѣленіе котангенса для суммы и разности двухъ угловъ.

Извѣстно, что

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta},$$

раздѣливъ числителя и знаменателя дроби на $\sin \alpha \sin \beta$, получимъ:

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha} \quad (7)$$

Точно также найдемъ, что

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha} \quad (8)$$

§ 53. Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ для алгебраической суммы трехъ, четырехъ и т. д. угловъ. Имѣемъ:

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin(\alpha + \beta) \cos \gamma + \cos(\alpha + \beta) \sin \gamma = \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma;$$

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos(\alpha + \beta) \cos \gamma - \sin(\alpha + \beta) \sin \gamma = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma;$$

$$\text{Также} \quad \operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \gamma}$$

или, замѣнивъ $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ его величиною (§ 51) и умноживъ числителя и знаменателя на $1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$, получимъ:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma} \text{ и т. д.}$$

Примѣръ. Показать, что если $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ и ни одинъ изъ угловъ не будетъ равенъ $(n + \frac{1}{2}) 180^\circ$, гдѣ n цѣлое число, то

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

Положивъ, въ предыдущей формулѣ для $\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma)$, сумму $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ и замѣтивъ, что, въ такомъ случаѣ, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta +$

$+ \gamma) = 0$, заключаемъ, что и вторая часть равенства тоже равна нулю, а для этого необходимо, чтобы числитель

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$$

былъ бы равенъ нулю, т. е. чтобы

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

§ 54. **Определение суммы и разности синусовъ и косинусовъ двухъ угловъ.** Изъ формулъ (1), (2), (3) и (4) (§§ 46, 47), получимъ:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta,$$

и

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta.$$

Положимъ $\alpha + \beta = a$ и $\alpha - \beta = b$; тогда, сложивъ почленно эти равенства, найдемъ: $2\alpha = a + b$ или $\alpha = \frac{a+b}{2}$, а вычтя почленно второе равенство изъ перваго, получимъ: $2\beta = a - b$ или $\beta = \frac{a-b}{2}$. Теперь замѣнимъ въ предыдущихъ равенствахъ $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, α и β ихъ величинами и найдемъ:

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}, \quad (9)$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}, \quad (10)$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad (11)$$

и

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}, \quad (12)$$

т. е. *сумма синусовъ двухъ угловъ равна удвоенному произведенію синуса полусуммы этихъ угловъ на косинусъ полуразности тѣхъ же угловъ; разность синусовъ двухъ угловъ равна удвоенному произведенію косинуса полусуммы этихъ угловъ на синусъ полуразности тѣхъ же угловъ и т. д.*

Раздѣливъ почленно (9) равенство на (10), найдемъ:

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \frac{2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \operatorname{ctg} \frac{a-b}{2}, \quad (13)$$

и в синахъ синусовъ двухъ данныхъ угловъ относится къ разности синусовъ тѣхъ же угловъ, точно такъ, какъ тангенсъ полусуммы дѣльныхъ угловъ относится къ тангенсу полуразности тѣхъ же угловъ.

Изъ (11) и (12) равенствъ также найдемъ, что

$$\frac{\cos a + \cos b}{\cos a - \cos b} = \frac{2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{-2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}} = -\operatorname{ctg} \frac{a+b}{2} \operatorname{ctg} \frac{a-b}{2}.$$

Примѣръ I. Опредѣлить $\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha)$. Положивъ въ (9) формулѣ $a = 30^\circ + \alpha$ и $b = 30^\circ - \alpha$, получимъ:

$$\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha) = 2 \sin 30^\circ \cos \alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} \cos \alpha = \cos \alpha$$

Примѣръ II. Опредѣлить $\cos(30^\circ + \alpha) - \cos(30^\circ - \alpha)$. Положивъ въ (12) формулѣ $a = 30^\circ + \alpha$, и $b = 30^\circ - \alpha$, найдемъ:

$$\cos(30^\circ + \alpha) - \cos(30^\circ - \alpha) = -2 \sin 30^\circ \cdot \sin \alpha = -\sin \alpha.$$

Примѣръ III. Опредѣлить $\sin(45^\circ + \varphi) - \sin(45^\circ - \varphi)$. По формулѣ (10) найдемъ:

$$\sin(45^\circ + \varphi) - \sin(45^\circ - \varphi) = 2 \cos 45^\circ \sin \varphi = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi = \sqrt{2} \cdot \sin \varphi.$$

Примѣръ IV. Опредѣлить: $\sin(60^\circ + \omega) - \sin(60^\circ - \omega)$. По формулѣ (10) имѣемъ:

$$\sin(60^\circ + \omega) - \sin(60^\circ - \omega) = 2 \cos 60^\circ \sin \omega = \sin \omega.$$

§ 55. Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ для угловъ, кратныхъ данному. Положивъ въ (1) и (2) формулахъ (§ 46) $\beta = \alpha$, получимъ:

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha$$

или

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (15)$$

т. е. синусъ двойнаго даннаго угла равенъ удвоенному произведенію синуса даннаго угла на косинусъ того же угла.

Также

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$$

или

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad (16)$$

т. е. косинусъ двойнаго даннаго угла равенъ разности квадратовъ косинуса и синуса даннаго угла.

Подставивъ въ (16) формулѣ $1 - \sin^2 \alpha$ вмѣсто $\cos^2 \alpha$, получимъ:

$$\cos 2\alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha, \quad (17)$$

а подставивъ въ той же формулѣ $1 - \cos^2 \alpha$ вмѣсто $\sin^2 \alpha$, найдемъ:

$$\cos 2\alpha - \cos^2 \alpha = (1 - \cos^2 \alpha) - \cos^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1, \quad (18)$$

Положивъ $\beta = \alpha$ въ (5) формулѣ § 51, найдемъ:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad (19)$$

т. е. *тангенсъ двойнаго даннаго угла равенъ удвоенному тангенсу даннаго угла, деленному на разность между 1 и квадратомъ тангенса этого угла.*

Положивъ $\beta = \alpha$ въ (7) формулѣ (§ 52), получимъ:

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}. \quad (20)$$

Также найдемъ:

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha \sin \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha \\ &= 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha; \end{aligned}$$

но $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ и потому

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha. \quad (21)$$

Имѣемъ:

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha \sin \alpha \\ &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \alpha \\ &= \cos^3 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha; \end{aligned}$$

но $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ и потому

$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha. \quad (22)$$

Также

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha;$$

умноживъ числителя и знаменателя на $1 - \operatorname{tg}^2 \alpha$, получимъ:

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (23)$$

Такимъ же точно образомъ можемъ опредѣлить $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$ и т. д.

§ 56. Формулы для $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$ и т. д. можно найти еще слѣдующимъ образомъ. Положивъ въ формулахъ (9) и (11) $a = (n+1)\alpha$ и $b = (n-1)\alpha$, найдемъ:

$$\sin(n+1)\alpha + \sin(n-1)\alpha = 2 \sin n\alpha \cos \alpha$$

и $\cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha = 2 \cos n\alpha \cos \alpha$;

отсюда

$$\sin(n+1)\alpha = 2 \sin n\alpha \cos \alpha - \sin(n-1)\alpha \quad (24)$$

и $\cos(n+1)\alpha = 2 \cos n\alpha \cos \alpha - \cos(n-1)\alpha. \quad (25)$

Пологая $n = 1$, получимъ:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \text{ и } \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1;$$

пологая $n = 2$, найдемъ:

$$\sin 3\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha$$

и $\cos 3\alpha = 2 \cos 2\alpha \cos \alpha - \cos \alpha$ и т. д.

Примръ I. Показать, что $\operatorname{tg}(\alpha + 45^\circ) - \operatorname{tg}(\alpha - 45^\circ) = 2 \operatorname{tg} 2\alpha$.
Рѣшемъ:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + 45^\circ) - \operatorname{tg}(\alpha - 45^\circ) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{1 - \operatorname{tg} \alpha} - \frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{1 + \operatorname{tg} \alpha} \\ &= \frac{(\operatorname{tg} \alpha + 1)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - 1)^2}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = 2 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = 2 \operatorname{tg} 2\alpha. \end{aligned}$$

Примръ II. Показать, что $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 2 \operatorname{cosec} 2\alpha$.
Рѣшемъ:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \\ &= \frac{2}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha} = 2 \operatorname{cosec} 2\alpha. \end{aligned}$$

Примръ III. Показать, что $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = -2 \operatorname{ctg} 2\alpha$.
Рѣшеніе:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \\ &= -\frac{2 \cos 2\alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = -\frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = -2 \operatorname{ctg} 2\alpha. \end{aligned}$$

Примръ IV. Определить синусъ и косинусъ для угловъ въ 18° и 72° .

Если означимъ уголъ, содержащій 18° , буквою α , то $5\alpha = 90^\circ$ или $2\alpha + 3\alpha = 90^\circ$ и потому (§ 38)

$$\sin 2\alpha = \cos 3\alpha.$$

Поставив сюда вместо $\sin 2\alpha$ и $\cos 3\alpha$ их величины (§ 55), найдемъ:

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

или, раздѣливъ всѣ члены на $\cos \alpha$, получимъ:

$$2 \sin \alpha = 4 \cos^2 \alpha - 3;$$

но $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$, а потому

$$2 \sin \alpha = 4(1 - \sin^2 \alpha) - 3 \quad \text{или} \quad 4 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha - 1 = 0;$$

откуда

$$\sin \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

$\sin 18^\circ$ есть число положительное, а потому при $\sqrt{5}$ надо взять только +; получимъ:

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

Теперь

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\sin 72^\circ = \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \quad \text{и} \quad \cos 72^\circ = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Примѣръ V. Опредѣлить синусъ и косинусъ для угловъ въ 36° и 54° .

Намъ известно (§ 55), что $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$; подставивъ здѣсь 18° вмѣсто α , получимъ:

$$\cos 36^\circ = 1 - 2 \sin^2 18^\circ = 1 - 2 \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{5} + 1}{4};$$

$$\sin 36^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 36^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Отсюда легко опредѣлить $\sin 54^\circ$ и $\cos 54^\circ$, потому что $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ$ и $\cos 54^\circ = \sin 36^\circ$.

Примѣръ VI. Проверить равенство:

$$\sin \alpha + \sin (72^\circ + \alpha) - \sin (72^\circ - \alpha) = \sin (36^\circ + \alpha) - \sin (36^\circ - \alpha).$$

По (10) формулѣ (§ 54):

$$\sin (72^\circ + \alpha) - \sin (72^\circ - \alpha) = 2 \sin \alpha \cos 72^\circ$$

и $\sin (36^\circ + \alpha) - \sin (36^\circ - \alpha) = 2 \sin \alpha \cos 36^\circ;$

слѣдовательно, данное равенство приметъ видъ:

$$\sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos 72^\circ = 2 \sin \alpha \cos 36^\circ.$$

Если $\alpha = n \cdot 180^\circ$, гдѣ n цѣлое число, то справедливость этого равенства очевидна; если же α не равно $n \cdot 180^\circ$, то, раздѣливъ всё члены на $\sin \alpha$, получимъ:

$$1 + 2 \cos 72^\circ = 2 \cos 36^\circ.$$

Подставивъ вмѣсто $\cos 72^\circ$ и $\cos 36^\circ$ ихъ величины, найдемъ:

$$1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

§ 57. Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ для угла, составяющаго половину, четверть и т. д. даннаго угла. Извѣстно, что

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad \text{и} \quad \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha.$$

Складывая почленно эти равенства, найдемъ:

$$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha \quad \text{или} \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}},$$

а вычтя —

$$2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha \quad \text{или} \quad \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}.$$

Поставивъ въ найденныхъ формулахъ $\frac{\alpha}{2}$ вмѣсто α , получимъ:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad (26) \quad \text{и} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}. \quad (27)$$

1. е. синусъ половины даннаго угла равенъ \pm квадратный корень изъ полуразности между 1 и косинусомъ даннаго угла, а косинусъ половины даннаго угла равенъ \pm квадратный корень изъ полу суммы 1 и косинуса даннаго угла.

Изъ формулъ (26) и (27) видимъ, что для каждаго значенія $\cos \alpha$ имѣемъ по два значенія для $\sin \frac{\alpha}{2}$ и $\cos \frac{\alpha}{2}$, а потому если данъ только $\cos \alpha$ и ничего не дано относительно угла α , то неизвѣстно, какой надо взять знакъ при радикалѣ въ этихъ формулахъ; если же извѣстно какой четверти принадлежитъ уголь α , то можно опредѣлить: будетъ ли $\sin \frac{\alpha}{2}$ или $\cos \frac{\alpha}{2}$ положительный или отрицательный, а слѣдовательно будетъ извѣстенъ и знакъ, который должно поставить предъ радикаломъ. Напр., если α заключается

между 180° и 270° , то $\frac{\alpha}{2}$ заключается между 90° и 135° , а потому (спусь для этого угла будет положительный, а косинус отрицательный; следовательно, в формулѣ (26) надо взять при радикалѣ знак $+$, а в формулѣ (27) знак $-$.

Примѣръ. Определить $\sin 22^\circ 30'$ и $\cos 22^\circ 30'$. По формуламъ (26) и (27) получимъ:

$$\sin 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{и} \quad \cos 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

§ 58. Причину двойственности значеній для $\sin \frac{\alpha}{2}$ и $\cos \frac{\alpha}{2}$, когда данъ $\cos \alpha$, можно видѣть изъ слѣдующаго. Пусть φ будетъ одинъ изъ угловъ, имѣющихъ данный косинусъ; тогда все углы, имѣющие тотъ же косинусъ, выразятся (§ 45) формулою: $2n\pi \pm \varphi$, следовательно, выражение, которое определяетъ величину $\sin \frac{1}{2}(2n\pi \pm \varphi)$ въ зависимости отъ $\cos \varphi$ можетъ дать величину синуса для каждаго изъ угловъ, определенныхъ формулою: $\frac{1}{2}(2n\pi \pm \varphi)$, гдѣ n цѣлое число. Но

$$\sin \frac{1}{2}(2n\pi \pm \varphi) = \sin \left(n\pi \pm \frac{\varphi}{2} \right) = \sin n\pi \cos \frac{\varphi}{2} \pm \cos n\pi \sin \frac{\varphi}{2} = \pm \sin \frac{\varphi}{2}$$

Такимъ образомъ имѣемъ двѣ величины синуса, различающіяся только знаками.

Точно также формула, которая даетъ величину $\cos \frac{1}{2}(2n\pi \pm \varphi)$ въ зависимости отъ $\cos \varphi$, можетъ также дать величину косинуса для каждаго изъ угловъ, определенныхъ формулою: $\frac{1}{2}(2n\pi \pm \varphi)$, гдѣ n цѣлое число. Но

$$\cos \frac{1}{2}(2n\pi \pm \varphi) = \cos \left(n\pi \pm \frac{\varphi}{2} \right) = \cos n\pi \cos \frac{\varphi}{2} \pm \sin n\pi \sin \frac{\varphi}{2} = \pm \cos \frac{\varphi}{2};$$

следовательно, имѣемъ двѣ величины косинуса, различающіяся только знаками.

§ 59. Можно также определить синусъ и косинусъ половинъ угла въ зависимости отъ синуса цѣлаго угла. Извѣстно (§§ 31, 35), что

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{и} \quad 2\sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha.$$

Сложивъ почленно эти равенства, получимъ

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha,$$

а вычтя почленно одно равенство изъ другаго,

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha;$$

откуда

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \pm \sqrt{1 + \sin 2\alpha} \quad \text{и} \quad \sin \alpha - \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin 2\alpha}.$$

Подставивъ здѣсь $\frac{\alpha}{2}$ вмѣсто α , получимъ:

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin \alpha} \quad (28) \quad \text{и} \quad \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{1 - \sin \alpha}; \quad (29)$$

откуда

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin \alpha} \pm \sqrt{1 - \sin \alpha}$$

$$2 \cos \frac{\alpha}{2} = + \sqrt{1 + \sin \alpha} \pm \sqrt{1 - \sin \alpha}.$$

Здесь имеем четыре величины для $\sin \frac{\alpha}{2}$ и четыре величины для $\cos \frac{\alpha}{2}$, что можно объяснить следующим образом: если φ означает один из углов, имеющих данный синусъ, то все углы, имеющие тот же синусъ, заключаются въ форму (§ 45): $n\pi + (-1)^n \varphi$, следовательно, выражение, которое даетъ величину $\sin \frac{1}{2} \alpha$ въ зависимости отъ $\sin \varphi$, можетъ дать величину синуса каждаго изъ угловъ, определенныхъ формулою: $\frac{1}{2} [n\pi + (-1)^n \varphi]$, гдѣ n цѣлое число. Предположимъ сперва n четнымъ и равнымъ $2m$; тогда

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} [n\pi + (-1)^n \varphi] &= \sin \frac{1}{2} [2m\pi + (-1)^{2m} \varphi] = \sin \left(m\pi + \frac{\varphi}{2} \right) \\ &= \sin m\pi \cos \frac{\varphi}{2} + \cos m\pi \sin \frac{\varphi}{2} = \pm \sin \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Предположимъ n нечетнымъ и равнымъ $2m + 1$, получимъ:

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} [n\pi + (-1)^n \varphi] &= \sin \frac{1}{2} [(2m + 1)\pi + (-1)^{2m+1} \varphi] = \\ &= -\sin \frac{1}{2} (2m\pi + \pi - \varphi) = \sin \left(m\pi + \frac{\pi - \varphi}{2} \right) = \\ &= \pm \sin \frac{\pi - \varphi}{2} = + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) = \pm \cos \frac{\varphi}{2}; \end{aligned}$$

откуда и видно, что одной величины синуса угла соответствуютъ четыре величины синуса половины этого угла. То же также формула, которая даетъ величину для $\cos \frac{1}{2} \alpha$ въ зависимости отъ $\sin \varphi$, можетъ также дать величину косинуса для каждаго изъ угловъ (§ 45), определенныхъ формулою: $\frac{1}{2} [n\pi + (-1)^n \varphi]$; поступая также какъ въ предыдущемъ случаѣ, найдемъ:

$$\text{для } n \text{ четнаго: } \cos \frac{1}{2} [n\pi + (-1)^n \varphi] = \pm \cos \frac{\varphi}{2},$$

$$\text{для } n \text{ нечетнаго: } \cos \frac{1}{2} [n\pi + (-1)^n \varphi] = \pm \sin \frac{\varphi}{2}.$$

§ 60. Когда дана только величина $\sin \alpha$ и болѣе ничего не связано относительно угла α , то неизвѣстно какия надобно взять знаки передъ радикалами въ формулахъ (28) и (29); но, если известно, какой четверти принадлежитъ уголъ α , то вопросъ относительно знаковъ разрѣшается вполнѣ.

Напр. пусть α заключается между 0° и 90° ; тогда $\frac{\alpha}{2}$ будетъ заключаться между 0° и 45° и потому $\sin \frac{\alpha}{2}$ и $\cos \frac{\alpha}{2}$ будутъ положительными, а слѣдоват. и сумма: $\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}$ будетъ тоже положительная и передъ

радикаломъ въ (28) формулѣ надобно взять знакъ +, въ этомъ случаѣ (§ 33) $\cos \frac{\alpha}{2} > \sin \frac{\alpha}{2}$, а потому разность: $\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}$ отрицательная и передъ радикаломъ въ (29) формулѣ надо взять знакъ —. И такъ, когда α заключается между 0° и 90° , то

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + \sin \alpha}, \quad \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{1 - \sin \alpha},$$

отсюда

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} = +\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha}$$

и

$$2 \cos \frac{\alpha}{2} = +\sqrt{1 + \sin \alpha} + \sqrt{1 - \sin \alpha}.$$

§ 61. Можно дать общую формулу для опредѣленія знаковъ при величинахъ: $\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}$ и $\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}$. Имѣемъ:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

$\sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$ будетъ положительнымъ, когда $\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}$ (§ 22) заключается между $2n\pi$ и $(2n+1)\pi$ и отрицательнымъ, когда $\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}$ заключается между $(2n+1)\pi$ и $(2n+2)\pi$, гдѣ n целое число или нуль, следовательно, $\sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$ будетъ положительнымъ, когда $\frac{\alpha}{2}$ заключается между $2n\pi - \frac{\pi}{4}$ и $2n\pi + \frac{3\pi}{4}$ и отрицательнымъ, когда $\frac{\alpha}{2}$ заключается между $2n\pi + \frac{3\pi}{4}$ и $2n\pi + \frac{7\pi}{4}$.

Точно также

$$\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right),$$

но $\sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$ будетъ положительнымъ, когда $\frac{\alpha}{2}$ заключается между $2n\pi + \frac{\pi}{4}$ и $2n\pi + \frac{5\pi}{4}$ и отрицательнымъ, когда $\frac{\alpha}{2}$ заключается между $2n\pi + \frac{5\pi}{4}$ и $2n\pi + \frac{9\pi}{4}$.

Примѣръ. Опредѣлить $\sin 9^\circ$, $\cos 9^\circ$, $\sin 81^\circ$ и $\cos 81^\circ$.

По § 59 имѣемъ:

$$\sin 9^\circ + \cos 9^\circ = \sqrt{1 + \sin 18^\circ} = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}}}{2}$$

$$\text{и} \quad \sin 9^\circ - \cos 9^\circ = -\sqrt{1 - \sin 18^\circ} = -\frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2}.$$

откуда

$$\sin 9^\circ = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2} \quad \text{и} \quad \cos 9^\circ = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2}.$$

Синусъ же и косинусъ 81° опредѣлятся по формуламъ

$$\sin 81^\circ = \cos 9^\circ \quad \text{и} \quad \cos 81^\circ = \sin 9^\circ.$$

§ 62. Опредѣлимъ теперь $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$. Извѣстно, что

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}},$$

или

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}; \quad (30)$$

умноживъ подъ корнемъ числителя и знаменателя дроби на $1 + \cos \alpha$, получимъ:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha)^2}} = \pm \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}; \quad (31)$$

или же, умноживъ числителя и знаменателя дроби, стоящей подъ радикаломъ въ (30) формулѣ, на $1 - \cos \alpha$, найдемъ:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{1 - \cos^2 \alpha}} = \pm \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (32)$$

Если знаемъ какой четверти принадлежитъ уголь α , то тогда легко опредѣлить какой четверти принадлежитъ уголь $\frac{1}{2} \alpha$, а слѣдовательно и знакъ передъ второю частью въ формулахъ (30), (31) и (32).

Изъ формулы (30) можно вывести, что

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \text{а} \quad \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

§ 63. Можно опредѣлить $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$ въ зависимости отъ $\operatorname{tg} \alpha$. Въ § 55 имѣли:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

подставивъ здѣсь $\frac{1}{2} \alpha$ вмѣсто α , найдемъ:

$$\operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} : \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right),$$

откуда и можемъ опредѣлить $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$ по $\operatorname{tg} \alpha$. Для этого, уничтожимъ знаменатели въ этомъ уравненіи; получимъ:

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \alpha = 0;$$

отсюда

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (33)$$

Когда дана величина $\operatorname{tg} \alpha$ и знаем какой четверти принадлежит угол α , то можем определить какой знак следует взять при радикале.

Объясним теперь: почему для каждого значения $\operatorname{tg} \alpha$ соответствует два значения для $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$? Означим буквою φ один из углов, имеющих данный тангенс; тогда все углы, имеющие тот же тангенс, заключаются в формулы (§ 45) $n\pi + \varphi$, где n целое число; следовательно, выражение, которое дает величину $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$ в зависимости от $\operatorname{tg} \varphi$, может дать величину тангенса каждого из углов, определенных формулою $\frac{1}{2}(n\pi + \varphi)$, где n целое число. Предположим n четным $n = 2m$; тогда

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(2m\pi + \varphi) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(2m\pi + \varphi) = \operatorname{tg} \left(m\pi + \frac{\varphi}{2} \right) = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2};$$

предположив же n нечетным $n = 2m + 1$, найдем:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(2m\pi + \pi + \varphi) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(2m\pi + \pi + \varphi) = \operatorname{tg} \left(m\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) = -\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

Отсюда видим, что при данном тангенсе имеем две величины для тангенса половины угла.

Примеръ. Опредѣлить $\operatorname{tg} 15^\circ$.

Извѣстно, что $\operatorname{tg} 15^\circ$ есть число положительное, а потому, подставивъ въ (33) формулу 30° вмѣсто α , надо будетъ взять передъ радикаломъ знакъ $+$; получимъ:

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 30^\circ}}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 1}}{\sqrt{3}} = -1 + \sqrt{4 - 2} = \sqrt{3}.$$

§ 64. Зная $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, легко определить $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. По § 31: $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = 1 : \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ и, замѣнивъ здѣсь $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ его величиною изъ формулы (31) и (32), получимъ:

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \pm \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} *). \dots \dots (34).$$

* Изъ равенства $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$, вытемъ: $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \sin \alpha = 1 + \cos \alpha$ или $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \pm \operatorname{cosec} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha$; откуда $\operatorname{cosec} \alpha = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg} \alpha$.

§ 65. По формуламъ §§ 57, 62 и 64 можемъ опредѣлять тригонометрическія величины угловъ: $\frac{\alpha}{4}, \frac{\alpha}{16}, \frac{\alpha}{32}, \dots$ по тригонометри-

ческимъ величинамъ угла α . Напр., чтобы опредѣлить $\sin \frac{\alpha}{4}$,

вставимъ въ (26) формулѣ $\frac{\alpha}{2}$ вмѣсто α и получимъ:

$$\sin \frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\alpha}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1 + \cos \alpha}{2}}{2}}$$

§ 66. Опредѣленіе числа значеній $\cos \frac{\alpha}{3}$ и $\sin \frac{\alpha}{3}$ при данной величинѣ $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$. Опредѣлимъ $\cos \frac{\alpha}{3}$ по $\cos \alpha$, и для этого въ (22) формулѣ (§ 55):

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

подставимъ $\frac{\alpha}{3}$ вмѣсто α ; получимъ:

$$\cos \alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}.$$

Это уравненіе третьей степени относительно $\cos \frac{\alpha}{3}$ и дастъ три вели-

чины для $\cos \frac{\alpha}{3}$. Причину этого можно объяснить такъ: если φ будетъ одинъ изъ угловъ, имѣющихъ данный косинусъ, то все углы, имѣющіе тотъ же косинусъ, заключаются въ формулѣ (§ 45), $2m\pi + \varphi$, гдѣ m цѣлое число; слѣдовательно, равенство, опредѣляющее $\cos^3 \frac{\alpha}{3}$ по $\cos \varphi$, можетъ дать величину $\cos^3 \frac{\alpha}{3}$ для каждаго изъ угловъ, опредѣленныхъ формулою $\frac{1}{3}(2n\pi + \varphi)$, гдѣ n цѣлое число. Здѣсь n можетъ или дѣлиться на-цѣло на 3 или, при дѣленіи на 3, дать въ остаткѣ 1 или 2, т. е. n можетъ быть вида или $3m$, или $3m + 1$ или $3m + 2$. Предположимъ сперва $n = 3m$; тогда

$$\cos^3 \frac{1}{3}(2n\pi + \varphi) = \cos^3(2m\pi + \frac{\varphi}{3}) = \cos^3 \frac{\varphi}{3}$$

Предположимъ $n = 3m + 1$; тогда

$$\cos^3 \frac{1}{3}(2n\pi + \varphi) = \cos^3(2m\pi + \frac{2\pi + \varphi}{3}) = \cos^3 \frac{2\pi + \varphi}{3};$$

наконецъ, предположимъ $n = 3m + 2$; тогда

$$\cos^3 \frac{1}{3}(2n\pi + \varphi) = \cos^3(2m\pi + \frac{4\pi + \varphi}{3}) = \cos^3 \frac{4\pi + \varphi}{3} = \cos^3 \frac{2\pi - \varphi}{3}$$

Слѣдовательно, при данномъ значеніи $\cos \varphi$ имѣемъ для $\cos^3 \frac{\alpha}{3}$ три ве-

личины $\cos^3 \frac{\varphi}{3}$, $\cos^3 \frac{2\pi + \varphi}{3}$ и $\cos^3 \frac{2\pi - \varphi}{3}$

§ 67. Легко также определить $\sin \frac{\alpha}{3}$ по $\sin \alpha$. Въ § 56 имѣли

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha,$$

гдѣ подставивъ $\frac{\alpha}{3}$ вмѣсто α , получимъ,

$$\sin \alpha = 3 \sin \frac{\alpha}{3} - 4 \sin^3 \frac{\alpha}{3};$$

это уравненіе даетъ три величины для $\sin \frac{\alpha}{3}$, именно $\sin \frac{\varphi}{3}$, $\sin \frac{2\pi - \varphi}{3}$

и $\sin \frac{2\pi + \varphi}{3}$, гдѣ φ есть одинъ изъ угловъ, имѣющихъ данный синусъ.

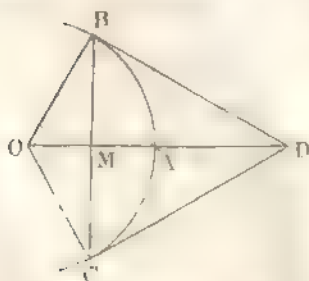
ОТДѢЛЪ IV.

Нахожденіе тригонометрическихъ величинъ для угловъ

§ 68. Теоремы, на которыхъ основывается нахожденіе тригонометрическихъ величинъ для малыхъ угловъ. Теорема I *Если означимъ буквою ϑ кривую мѣру какого-нибудь угла, который меньше прямого, то ϑ больше $\sin \vartheta$ и меньше $\operatorname{tg} \vartheta$*

Возьмемъ уголъ AOB , меньшій прямого; изъ точки B поставимъ перпендикуляръ къ OA и продолжимъ его до пересѣчи съ

Фиг. 31.



прямую OA въ точкѣ D ; изъ точки же B опустимъ перпендикуляръ BM на OA и, продолживъ его, отложимъ $MC = MB$. Точку C соединимъ прямой съ точками O и D . Прямоугольные треугольники OMC и OMB равны, потому что катетъ OM у нихъ общій, а $MC = MB$, по отложенію; слѣдовательно, $OC = OB$ и уголъ $COM =$ углу BOM .

Треугольники $OC'D$ и $OB'D$ также равны, потому что бокъ OD у нихъ общій, стороны OC' и OB' равны, какъ сейчасъ доказано, а уголъ $DOC' = DOB'$; слѣдова-

тельно, $CD = BD$ и уголъ $OC'D$ — углу OBD ; уголъ же OBD прямой, а потому и уголъ $OC'D$ также прямой.

Изъ точки O опишемъ дугу радиусомъ OB ; она касается CD въ точкѣ C' и BD въ точкѣ B . Очевидно, что хорда BC' менѣе дуги BAC' , а потому и половина хорды BC' менѣе половины дуги BAC' , т. е. $BM < AB$; раздѣливъ обѣ части неравенства на OB , получимъ: $\frac{BM}{OB} < \frac{AB}{OB}$. Но $\frac{BM}{OB}$ есть синусъ угла AOB , а $\frac{AB}{OB}$ круговая мѣра угла AOB , поэтому $\sin AOB$ менѣе круговой мѣры угла AOB .

Также видимъ, что ломаная линия: $BD + DC'$ болѣе дуги BAC' ; но $DC' = DB$, а потому $2BD$ болѣе дуги BAC' или BD болѣе половины дуги BAC' , т. е. BD болѣе дуги AB ; отсюда $\frac{BD}{OB} > \frac{AB}{OB}$.

А такъ какъ $\frac{BD}{OB}$ есть тангенсъ угла AOB , а $\frac{AB}{OB}$ есть круговая мѣра угла AOB , то выходитъ, что $\text{tg } AOB$ болѣе круговой мѣры угла AOB .

Обозначивъ круговую мѣру угла AOB буквою ϑ , получимъ, при $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$:

$$\sin \vartheta < \vartheta \text{ и } \text{tg } \vartheta > \vartheta.$$

§ 69. Теорема II. Предѣлъ отношенія $\frac{\sin \vartheta}{\vartheta}$, при неопредѣленномъ уменьшеніи ϑ , есть 1.

Въ предъидущемъ параграфѣ нашли, что если $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, то

$$\sin \vartheta < \vartheta \text{ и } \vartheta < \text{tg } \vartheta \text{ или } \sin \vartheta < \vartheta \text{ и } \vartheta < \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta}.$$

Написавъ каждый изъ членовъ неравенства въ обратномъ видѣ, получимъ:

$$\frac{1}{\sin \vartheta} > \frac{1}{\vartheta} \text{ и } \frac{1}{\vartheta} > \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \text{ или } \frac{1}{\sin \vartheta} > \frac{1}{\vartheta} > \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta};$$

умноживъ всѣ члены неравенствъ на $\sin \vartheta$, найдемъ:

$$1 > \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} > \cos \vartheta.$$

Когда ϑ приближается къ нулю, $\cos \vartheta$ приближается къ 1, а слѣдовательно и величина дроби $\frac{\sin \vartheta}{\vartheta}$, заключающейся между 1 и

$\cos \vartheta$, приближается къ единицѣ; наконецъ, когда ϑ сдѣлается равнымъ 0, то $\cos \vartheta$ будетъ равенъ 1 и предѣлъ отношенія $\sin \vartheta$ къ ϑ будетъ 1. И такъ

$$\lim. \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} = 1^*).$$

Слѣдствіе. Такъ какъ $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} = \frac{1}{\cos \vartheta}$, то, при приближеніи ϑ къ нулю, $\frac{\sin \vartheta}{\vartheta}$ и $\frac{1}{\cos \vartheta}$ стремятся къ единицѣ, а потому и отношеніе $\operatorname{tg} \vartheta$ къ ϑ также стремится къ единицѣ, когда же $\vartheta = 0$, то

$$\lim. \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\vartheta} = 1.$$

§ 70. Теорема III. Разность между круговою мѣрою угла, заключающагося между 0 и 90°, и его синусомъ менше четверти куба круговой мѣры этого угла.

Пусть ϑ означаетъ круговую мѣру угла, заключающагося между 0° и 90°, тогда

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} > \frac{\vartheta}{2} \quad \text{или} \quad \sin \frac{\vartheta}{2} : \cos \frac{\vartheta}{2} > \frac{\vartheta}{2}; \quad \text{откуда} \quad \sin \frac{\vartheta}{2} > \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2}$$

Но (§ 55) $\sin \vartheta = \sin 2 \cdot \frac{\vartheta}{2} = 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2}$; подставивъ во второй части этого равенства вмѣсто $\sin \frac{\vartheta}{2}$ произведеніе $\frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2}$, мы уменьшимъ вторую часть, и слѣдовательно получимъ.

$$\sin \vartheta > 2 \cdot \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \quad \text{или} \quad \sin \vartheta > \vartheta \cos^2 \frac{\vartheta}{2};$$

извѣстно (§ 31), что $\cos^2 \frac{\vartheta}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$, а потому

$$\sin \vartheta > \vartheta \left(1 - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right).$$

Это неравенство не измѣнится, если во второй части подставимъ $\frac{\vartheta}{2}$ вмѣсто $\sin \frac{\vartheta}{2}$, потому что отъ этого вычитаемое $\sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ увеличится, а слѣдовательно разность $1 - \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ уменьшится; поэтому

$$\sin \vartheta > \vartheta \left(1 - \frac{\vartheta^2}{4} \right) \quad \text{или} \quad \sin \vartheta > \vartheta - \frac{\vartheta^3}{4}.$$

* Lim (limite) означаетъ предѣлъ.

Перенеси ϑ въ первую часть неравенства и перемѣнивъ знаки во всѣхъ членахъ на обратные, найдемъ:

$$\vartheta - \sin \vartheta = \frac{\vartheta^3}{4}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что предѣлы для $\sin \vartheta$, при $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, суть:

$$\vartheta \text{ и } \vartheta - \frac{\vartheta^3}{4}.$$

§ 71. Можно также опредѣлить, между какими предѣлами заключается $\cos \vartheta$, когда $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$. Извѣстно, что $\cos \vartheta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$, а $\sin \frac{\vartheta}{2} < \frac{\vartheta}{2}$ и $\sin \frac{\vartheta}{2} > \frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\vartheta}{2} \right)^3$ или $\sin \frac{\vartheta}{2} > \frac{\vartheta}{2} - \frac{\vartheta^3}{32}$. Теперь, если вмѣсто $\sin \frac{\vartheta}{2}$ подставимъ, въ предъидущемъ равенствѣ, большую величину $\frac{\vartheta}{2}$, то вторая часть уменьшится и мы получимъ:

$$\cos \vartheta > 1 - 2 \left(\frac{\vartheta}{2} \right)^2 \text{ или } \cos \vartheta > 1 - \frac{\vartheta^2}{2};$$

а если, въ томъ-же равенствѣ, подставимъ вмѣсто $\sin \frac{\vartheta}{2}$ меньшую

величину: $\frac{\vartheta}{2} - \frac{\vartheta^3}{32}$, то вторая часть увеличится и мы получимъ:

$$\cos \vartheta < 1 - 2 \left(\frac{\vartheta}{2} - \frac{\vartheta^3}{32} \right)^2 \text{ или } \cos \vartheta < 1 - \frac{\vartheta^2}{2} + \frac{\vartheta^4}{16} - 2 \left(\frac{\vartheta^3}{32} \right)^2$$

и тѣмъ болѣе

$$\cos \vartheta < 1 - \frac{\vartheta^2}{2} + \frac{\vartheta^4}{16}.$$

Слѣд., если круговая мѣра угла больше 0 и меньше $\frac{\pi}{2}$, то

$$\cos \vartheta > 1 - \frac{\vartheta^2}{2} \text{ и } \cos \vartheta < 1 - \frac{\vartheta^2}{2} + \frac{\vartheta^4}{16}.$$

§ 72. Приближенное вычисленіе $\sin 10''$ и $\cos 10''$. Круговая мѣра угла въ $10''$ есть (§ 18)

$$\epsilon = \frac{10 \pi}{180.60 \times 60} = \frac{\pi}{64800} = 0.000048481368110... < 0.00005; \text{ но } (\S 70)$$

$$\sin 10'' < \epsilon \text{ и } \sin 10'' > \epsilon - \frac{\epsilon^3}{4},$$

сдѣ $\frac{\varepsilon^3}{4} < \frac{1}{4} (0,00005)^3$ или $\frac{\varepsilon^3}{4} < 0,000000000000125$. . . следовательно,

$$\sin 10'' < 0,000048481368110 \dots$$

и

$$\sin 10'' > 0,000048481368078 \dots$$

Въ этихъ двухъ предѣлахъ для $\sin 10''$ двѣнадцать первыхъ десятичныхъ знаковъ одинаковы, а потому, съ погрѣшностью меньшею $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{12}}$, получимъ:

$$\sin 10'' = 0,0000484813681.$$

§ 73. Теперь опредѣлимъ $\cos 10''$. Согласно § 71 имѣемъ:

$$\cos 10'' > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \text{ и } \cos 10'' < 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^4}{16},$$

а потому, если возьмемъ $\cos 10'' = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$, то сдѣлаемъ погрѣшность, меньшую $\frac{\varepsilon^4}{16}$. Для опредѣленія величины этой погрѣшности, примемъ, что

$$\varepsilon < 0,00005, \text{ или } \varepsilon < \frac{5}{100000} \text{ или } \varepsilon < \frac{1}{2 \cdot 10^4};$$

следовательно

$$\frac{\varepsilon^4}{16} < \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2^4 \cdot 10^{16}} \text{ или } \frac{\varepsilon^4}{16} < \frac{1}{256 \cdot 10^{16}},$$

но $\frac{1}{256} < \frac{1}{2 \cdot 10^{12}}$, а потому $\frac{\varepsilon^4}{16} < \frac{1}{2 \cdot 10^{12}}$; поэтому, припомнимъ

$$\cos 10'' = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2},$$

сдѣлаемъ погрѣшность меньшую $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{12}}$.

Подставивъ вмѣсто ε его величину и ограничиваясь 13 десятичными знаками, найдемъ:

$$\cos 10'' = 0,9999999988248.$$

§ 74. Мы нашли, что $\sin 10''$ равняется круговой мѣрѣ угла въ $10''$ съ погрѣшностью, меньшею $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{12}}$, а потому, очевидно, сдѣлаемъ еще меньшую ошибку, если приравняемъ $\sin 1''$ круговой мѣрѣ угла въ $1''$; следовательно, для небольшого значенія n ,

можемъ допустить съ малюю погрѣшностью, такое приближенное равенство:

$\sin n''$ — круговой мѣрѣ $n'' = n$. круг. мѣру $1'' = n$. $\sin 1''$ приближ.; откуда

$$n = \frac{\text{круг. мѣрѣ } n''}{\sin 1''} \text{ приблизительно.}$$

Точно также получимъ:

$\operatorname{tg} n''$ — круг мѣрѣ $n'' = n$. круг. мѣру $1'' = n$. $\operatorname{tg} 1''$ приближ.; откуда

$$n = \frac{\text{круг. мѣрѣ } n''}{\operatorname{tg} 1''} \text{ приблизительно.}$$

§ 75. Вычисленіе тригонометрическихъ величинъ угловъ отъ $10''$ до $10'$ въ промежуткѣ отъ 0° до 90° . Въ тригонометрическихъ таблицахъ невозможно помѣстить тригонометрическія величины для всѣхъ угловъ, а потому помѣщаютъ тригонометрическія величины угловъ въ $10''$, $20''$, $30''$, , т. е. постоянно увеличивая на $10''$, или въ $1'$, $2'$, $3'$, т. е. постоянно увеличивая на $1'$ и т. д.; въ первомъ случаѣ, говорятъ, что тригонометрическія таблицы составлены отъ $10''$ до $10'$, а во второмъ случаѣ отъ $1'$ до $1'$ и т. д.

Въ тригонометрическихъ таблицахъ нѣтъ надобности помѣщать тригонометрическія величины угловъ, большихъ 90° , потому что опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ такихъ угловъ приводится (§§ 38—43) къ опредѣленію тригонометрическихъ угловъ, меньшихъ 90° .

§ 76. Въ I отдѣлѣ видѣли, что если знаемъ величину одной изъ тригонометрическихъ величинъ, то можемъ опредѣлить всѣ тригонометрическія величины того-же угла, а потому достаточно найти величины синусовъ угловъ первой четверти отъ $10''$ до $10'$; по нимъ уже будетъ легко опредѣлить другія тригонометрическія величины для тѣхъ угловъ, для которыхъ найдены синусы.

§ 77. Для опредѣленія $\sin 20''$, $\sin 30''$ и т. д. можно было бы воспользоваться формулами для синуса двойнаго, тройнаго п т. д. угловъ; но вычисления по этимъ формуламъ очень затруднительны, а потому пользуются другими формулами, предложенными англійскимъ геометромъ Томасомъ Симпсономъ и найденными въ § 56. Мы такъ нашли, что

$$\sin (n + 1) \alpha = 2 \sin n \alpha \cos \alpha - \sin (n - 1) \alpha. \dots (1)$$

гдѣ положивъ $\alpha = 10''$, а $n = 1, 2, 3, 4, \dots$, найдемъ $\sin 20''$, $\sin 30'' \dots$. Напр., положивъ $n = 1$, найдемъ:

$$\sin 20'' = 2 \sin 10'' \cos 10'',$$

гдѣ $\sin 10''$ и $\cos 10''$ уже известны (§§ 72, 73); положивъ $n = 2$, найдемъ:

$$\sin 30'' = 2 \cos 10'' \sin 20'' - \sin 10'' \text{ и т. д.}$$

§ 78. Показанный приемъ вычисления синусовъ угловъ, кратныхъ углу въ $10''$, можно еще упростить.

Въ формулѣ (1) $\cos \alpha = \cos 10''$ есть число постоянное и весьма мало разнится отъ единицы (§ 73), а потому множитель $2 \cos \alpha$ мало разнится отъ 2; положимъ:

$$2 \cos 10'' = 2 - k,$$

гдѣ $k = 0,00000002350443053$ съ погрѣшностью меньшею $\frac{1}{2 \cdot 10^{18}}$.

Подставивъ въ (1) формулу $2 - k$ вместо $2 \cos 10''$, найдемъ:

$$\sin(n+1)\alpha = (2-k)\sin n\alpha - \sin(n-1)\alpha$$

или

$$\sin(n+1)\alpha = 2\sin n\alpha - k\sin n\alpha - \sin(n-1)\alpha$$

вычтя изъ обѣихъ частей равенства по $\sin n\alpha$, получимъ

$$\sin(n+1)\alpha - \sin n\alpha = \sin n\alpha - \sin(n-1)\alpha - k\sin n\alpha. \dots (2)$$

Это равенство даетъ возможность определить $\sin(n+1)\alpha - \sin n\alpha$ по разности $\sin n\alpha - \sin(n-1)\alpha$, которая уже передъ тѣмъ будетъ найдена, также какъ и $\sin(n-1)\alpha$, зная же разность $\sin(n+1)\alpha - \sin n\alpha$, гдѣ $\sin n\alpha$ известенъ, определяемъ $\sin(n+1)\alpha$. Напр., положивъ по (2) формулѣ $n=1$ и $\alpha=10''$, найдемъ: $\sin 20'' - \sin 10'' = \sin 10'' - k \sin 10''$, откуда определяемъ $\sin 20''$, потому что $\sin 10''$ уже известенъ. Положивъ $n=2$, найдемъ: $\sin 30'' - \sin 20'' = (\sin 20'' - \sin 10'') - k \sin 20''$, разность же $\sin 20'' - \sin 10''$, $\sin 10''$ и $\sin 20''$ уже известны, а потому получимъ величину разности $\sin 30'' - \sin 20''$, а следовательно и величину $\sin 30''$ и т. д.

§ 79. Вычисленіе $k \sin n\alpha$ можетъ быть значительно упрощено, если составимъ заранѣе произведенія k на 2, на 3, на 4, на 5, 6, 7, 8 и 9.

Выгода при употребленіи (2) формулы въ сравненіи съ (1) состоитъ въ томъ, что въ (1) формулѣ приходится въ первомъ членѣ умножать $\sin n\alpha$ на число довольно значительное и именно на $2 \cos 10'' = 1,9999999976495\dots$; между тѣмъ какъ во (2) формулѣ $\sin n\alpha$ приходится умножать на $k = 0,000000023504\dots$

§ 80. Когда найдемъ синусы угловъ до 45° , то вычисленіе синусовъ угловъ, большихъ 45° , можемъ произвести по формулѣ (§ 54):

$$\sin(30^\circ + \alpha) - \sin(30^\circ - \alpha) = 2 \cdot \sin \alpha;$$

откуда

$$\sin(30^\circ + \alpha) = \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha + \sin(30^\circ - \alpha),$$

гдѣ $\alpha < 30^\circ$.

Когда же найдемъ синусы угловъ до 60° , то вычисленіе синусовъ угловъ отъ 60° до 90° можно произвести по формулѣ (§ 54):

$$\sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha) = \sin \alpha,$$

гдѣ α будемъ давать значенія отъ 0° до 30° .

§ 81. Когда дѣлаютъ такія большія вычисленія, то необходимо полученные результаты повѣрить посредствомъ синусовъ такихъ угловъ, которые выражаются точно помощью радикаловъ и которые могутъ быть найдены съ какою угодно точностью. Кромѣ того, можно результаты повѣрить посредствомъ тождествъ, какъ напр. формула Ейлера (§ 56):

$$\sin \alpha + \sin(72^\circ + \alpha) - \sin(72^\circ - \alpha) - \sin(36^\circ + \alpha) - \sin(36^\circ - \alpha)$$

или, какъ формула Лежандра:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \sin(54^\circ + \alpha) + \sin(54^\circ - \alpha) - \sin(18^\circ + \alpha) - \sin(18^\circ - \alpha),$$

кот. получ. изъ предыдущей, подставивъ въ нее $90^\circ - \alpha$ вмѣсто α .

§ 82. Зная величины синусовъ для угловъ первой четверти, легко опредѣлить величины косинусовъ для угловъ первой же четверти по формулѣ:

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha).$$

Величины тангенсовъ для угловъ, меньшихъ 45° , опредѣлимъ по формулѣ (§ 31): $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, а для угловъ, большихъ 45° , по формулѣ (§ 56):

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) - \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = 2 \operatorname{tg} 2\alpha;$$

откуда

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) + 2 \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Величины котангенсовъ для угловъ первой четверти опредѣлимъ по формулѣ:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha);$$

Величины косеканса опредѣлимъ по формулѣ:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \quad \text{или} \quad (\S 56) \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right).$$

Величины секанса для угловъ первой четверти опредѣлимъ по формулѣ: $\sec \alpha = \operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha)$.

§ 83. Способъ, указанный нами, для опредѣленія тригонометрическихъ величинъ для угловъ, увеличивающихся на $10''$, есть тотъ, который былъ сперва употребленъ для составленія триго-

нометрических таблиц. В настоящее же время есть более простой прием для вычисления тригонометрических величин помощью рядов. Этот способ указан в XII отделе.

§ 84. Теорема. Предельное произведение $\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \dots \cos \frac{x}{2^n}$, в котором n увеличивается безпредельно, есть $\frac{\sin x}{x}$.

Мы знаем (§ 55), что $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ также $\sin \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4}$ и т. д.; так что

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ &= 4 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} \\ &= 8 \sin \frac{x}{8} \cos \frac{x}{8} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} \\ &= \dots \dots \dots \\ &= 2^n \sin \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^n} \dots \dots \cos \frac{x}{8} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2}; \end{aligned}$$

откуда

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \dots \dots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^n}} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Когда n делается равным безконечности, то предельное отношение $\sin \frac{x}{2^n}$ к $\frac{x}{2^n}$ (§ 69) будет равно 1 и потому

$$\lim \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \dots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}.$$

§ 85. На основании выведенной теоремы можно показать, что если $\vartheta > 0$ и $< \frac{\pi}{2}$, то $\sin \vartheta > \vartheta - \frac{\vartheta^3}{6}$.

В § 71 доказано, что $\cos \vartheta > 1 - \frac{\vartheta^2}{2}$; следовательно

$$\cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{4} > \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2^3}\right) \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2^5}\right)$$

и тем более

$$\cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{4} > 1 - \left(\frac{\vartheta^2}{2^3} + \frac{\vartheta^2}{2^5}\right),$$

также

$$\cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{4} \cos \frac{\vartheta}{8} > \left[1 - \left(\frac{\vartheta^2}{2^3} + \frac{\vartheta^2}{2^5}\right)\right] \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2^7}\right)$$

и подобно

$$\cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{4} \cos \frac{\vartheta}{8} > 1 - \left(\frac{\vartheta^2}{2^3} + \frac{\vartheta^2}{2^5} + \frac{\vartheta^2}{2^7}\right) \text{ и т. д.}$$

такъ что, вообще,

$$\cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{4} \cos \frac{\varphi}{8} \dots \cos \frac{\varphi}{2^n} > 1 - \left(\frac{\varphi^2}{2^4} + \frac{\varphi^2}{2^5} + \frac{\varphi^2}{2^7} + \dots + \frac{\varphi^2}{2^{2n+1}} \right);$$

но $\frac{\varphi^2}{2^4} + \frac{\varphi^2}{2^5} + \frac{\varphi^2}{2^7} + \dots + \frac{\varphi^2}{2^{2n+1}}$ есть сумма n членовъ геометрической про-

грессии, первый членъ которой $\frac{\varphi^2}{2^4}$, а знаменатель $\frac{1}{2^2}$ она равна

$$\frac{\varphi^2}{2^4} \left(1 - \frac{1}{2^{2n}} \right) : \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{\varphi^2}{6} - \frac{\varphi^2}{3 \cdot 2^{2n+1}};$$

слѣдовательно

$$\cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{4} \cos \frac{\varphi}{8} \dots \cos \frac{\varphi}{2^n} > 1 - \frac{\varphi^2}{6} + \frac{\varphi^2}{3 \cdot 2^{2n+1}}$$

При $n \rightarrow \infty$ первая часть равна $\frac{\sin \varphi}{\varphi}$, а потому

$$\frac{\sin \varphi}{\varphi} > 1 - \frac{\varphi^2}{6} \quad \text{или} \quad \sin \varphi > \varphi - \frac{\varphi^3}{6}$$

§ 86. Также (§§ 55, 85)

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad \text{и} \quad \sin \frac{\varphi}{2} > \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi^3}{48},$$

а потому, поставивъ въ этомъ равенствѣ $\frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi^2}{48}$ вмѣсто $\sin \frac{\varphi}{2}$, получимъ:

$$\cos \varphi < 1 - 2 \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi^3}{48} \right)^2 \quad \text{или} \quad \cos \varphi < 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24}$$

§ 87. Задача. Найти величины дробей: $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\alpha - \beta}$ и $\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\alpha - \beta}$ при

$\alpha = \beta$.

При $\alpha = \beta$ дробныя обращаются въ ∞ , а потому, чтобы найти истинное значеніе этихъ дробей, замѣнимъ разность синусовъ и косинусовъ произведеніями (§ 54); найдемъ:

$$\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\alpha - \beta} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\alpha - \beta} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\alpha - \beta} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\alpha - \beta} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Но такъ какъ предѣлъ отношенія \sin двухъ дугъ, при ея безпредѣльномъ уменьшеніи, равенъ (§ 69) 1, то, при $\beta = \alpha$, отношеніе $\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$ равно 1; поэтому изъ предыдущихъ равенствъ увидимъ, что, при $\beta = \alpha$, первая дробь равна

$$\cos \frac{1}{2}(\alpha + \alpha) = \cos \alpha$$

а вторая дробь равна

$$- \sin \frac{1}{2}(\alpha + \alpha) = - \sin \alpha.$$

ОТДѢЛЪ V.

Вычисленіе логарифмовъ тригонометрическихъ величинъ для угловъ. Расположеніе таблицъ логарифмовъ тригонометрическихъ величинъ для угловъ. — Теоремы, на которыхъ основывается нахождение логарифмовъ тригонометрическихъ величинъ для угловъ, не помѣщенныхъ въ таблицахъ.

§ 88. Вычисленіе логарифмовъ тригонометрическихъ величинъ и расположеніе таблицъ логарифмовъ тригонометрическихъ величинъ для угловъ.

При нахожденіи числовыхъ величинъ данныхъ выраженій, болѣею частью, прибѣгаютъ къ логарифмамъ, и потому въ таблицахъ помѣщаютъ обыкновенно не самыя тригонометрическія величины для угловъ, а ихъ логарифмы (которые не трудно опредѣлить по обыкновеннымъ логарифмамъ чиселъ) и располагаютъ въ извѣстномъ порядкѣ. Такимъ образомъ получаютъ *таблицы логарифмовъ тригонометрическихъ величинъ для угловъ*, различающіяся на одно и то же число секундъ; напр. на 10" или на 60" = 1' и т. д.

§ 89. Составляя таблицу логарифмовъ тригонометрическихъ величинъ для угловъ, надо вычислить только логарифмы синусовъ для угловъ отъ 0° до 90°, потому что логарифмы косинусовъ для угловъ найдемъ по формулѣ:

$$\lg \cos \alpha = \lg \sin (90^\circ - \alpha);$$

логарифмы тангенсовъ опредѣлимъ по формулѣ:

$$\lg \operatorname{tg} \alpha = \lg \sin \alpha - \lg \cos \alpha;$$

логарифмы котангенсовъ опредѣлимъ по формулѣ:

$$\lg \operatorname{ctg} \alpha = \lg \cos \alpha - \lg \sin \alpha \text{ или } \lg \operatorname{ctg} \alpha = \lg \operatorname{tg} \alpha.$$

Что же касается до логарифмовъ секанса и косеканса, то они будутъ равны, соответственно, логарифмамъ косинуса и синуса, взятымъ съ знакомъ минусъ, потому что

$$\lg \sec \alpha = \lg \frac{1}{\cos \alpha} = - \lg \cos \alpha \text{ и } \lg \operatorname{cosec} \alpha = \lg \frac{1}{\sin \alpha} = - \lg \sin \alpha.$$

Логарифмы секанса и косеканса рѣдко помѣщаютъ въ логариф-

мическихъ таблицахъ, потому что ихъ логарифмы, какъ видѣли, опредѣляются весьма просто; кромѣ того, эти тригонометрическія величины довольно рѣдко встрѣчаются въ вычисленіяхъ.

§ 90. Синусы и косинусы для угловъ въ промежуткѣ отъ 0° до 90° менѣе единицы, а потому выражаются правильными дробями; тангенсы для угловъ въ промежуткѣ отъ 0° до 45° и котангенсы въ промежуткѣ отъ 45° до 90° менѣе единицы, а потому также выражаются правильными дробями. Слѣдовательно, логарифмы синусовъ и косинусовъ въ промежуткѣ отъ 0° до 90° , тангенсовъ въ промежуткѣ отъ 0° до 45° и котангенсовъ отъ 45° до 90° будутъ отрицательные; для избѣжанія отрицательныхъ характеристикъ логарифмовъ прибавили, въ указанныхъ случаяхъ, по 10 къ характеристикамъ логарифмовъ, не измѣняя ихъ мантиссъ, а потому, при вычисленіяхъ, это обстоятельство не должно упускать изъ виду. Кромѣ того, намъ извѣстно (§ 22, 23, 24 и 25), что въ первой четверти, съ увеличеніемъ угла, синусы и тангенсы увеличиваются, а косинусы и котангенсы уменьшаются, и обратно; поэтому, съ увеличеніемъ угла, логарифмы синуса и тангенса увеличиваются, а логарифмы косинуса и котангенса уменьшаются, и обратно.

§ 91. Очевидно въ таблицахъ невозможно помѣстить логарифмы тригонометрическихъ величинъ для всѣхъ угловъ первой четверти, а потому помѣщаютъ логарифмы тригонометрическихъ величинъ для угловъ въ $10''$, $20''$, $30''$ и т. д., т. е. увеличивающихся на $10''$, и тогда говорятъ, что логарифмы тригонометрическихъ величинъ даны отъ $10''$ до $10''$; или для угловъ въ $1'$, $2'$, $3'$ и т. д., т. е. увеличивающихся на $1'$, и тогда говорятъ, что логарифмы тригонометрическихъ величинъ даны отъ $1'$ до $1'$ и т. д. Всѣ логарифмы тригонометрическихъ величинъ одной таблицы находятъ съ однимъ и тѣмъ же числомъ десятичныхъ знаковъ; такъ, ограничиваются семью десятичными знаками послѣ запятой, и говорятъ, что логарифмы семизначные, или пятью десятичными знаками, и говорятъ, что логарифмы пятизначные и т. д.

Изъ семизначныхъ таблицъ логарифмовъ наиболѣе вполнѣ обстоятельная суть: Калтета, Вега, обработанные Бречкеромъ, и Шрёна, а изъ пятизначныхъ Лаланда и Ноел. Въ примѣрахъ на вычисленія по семизначнымъ логарифмамъ я пользовался таблицами Вега, а при вычисленіяхъ по пятизначнымъ таблицамъ логарифмовъ — таблицами, изданными мною.

§ 92. Теоремы, на которых основывается нахождение логарифмовъ тригонометрическихъ величинъ для угловъ, не помѣщенныхъ въ таблицъ. (Определение логарифмовъ тригонометрическихъ величинъ для угловъ первой четверти, не заключающихся въ таблицахъ, основывается на теоремѣ: разности логарифмовъ одной изъ тригонометрическихъ величинъ приблизительно пропорциональны разности соответствующихъ имъ угловъ.)

Эту теорему докажемъ послѣдовательно для синусовъ, косинусовъ, тангенсовъ и котангенсовъ.

1. *Для логарифмовъ синуса.* означимъ буквою α данный уголъ и буквою ϑ ближайшій изъ угловъ, котораго логарифмъ синуса намъ извѣстенъ; пусть h означаетъ разность между α и ϑ , тогда $\alpha = \vartheta + h$, гдѣ h будетъ менѣе $10''$, когда пользуемся таблицами, гдѣ логарифмы тригонометрическихъ величинъ даны отъ $10''$ до $10''$, и менѣе $1'$, когда пользуемся таблицами, гдѣ логарифмы тригонометрическихъ величинъ даны отъ $1'$ до $1'$.

Мы знаемъ, что

$$\sin(\vartheta + h) = \sin \vartheta \cos h + \sin h \cos \vartheta;$$

если h будетъ менѣе $10''$, то можемъ приближительно положить $\cos h = 1$, а $\sin h = h$ (§ 70 и 71), и тогда получимъ:

$$\sin(\vartheta + h) = \sin \vartheta + h \cos \vartheta \dots \dots \dots (1)$$

Здѣсь необходимо посмотреть, какъ велика будетъ погрѣшность при опредѣленіи $\sin(\vartheta + h)$, отъ замѣны $\cos h$ единицею и $\sin h$ числомъ h . Если положимъ $\cos h = 1$, то сдѣлаемъ погрѣшность (§ 74), меньшую $\frac{1}{2} h^2$;

но $h = 10''$, а круговая мѣра h будетъ менѣе (§ 13) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4}$ и по-

тому $\frac{1}{2} h^2 < \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10^8}$ или $\frac{1}{2} h^2 < 0,00000001$; слѣдовательно, замѣнивъ $\cos h$ единицею сдѣлаемъ погрѣшность, меньшую единицы восьмага десятичнаго знака послѣ занятой и потому будемъ всегда имѣть восемь точныхъ десятичныхъ знаковъ. Если же положимъ $\sin h = h$, то сдѣлаемъ погрѣшность (§ 70), меньшую $\frac{1}{6} h^3$, а такъ какъ $h = 10''$, то погрѣшность, въ этомъ случаѣ, будетъ менѣе $0,000000000001$; слѣдовательно, эта замѣна не окажетъ влияния на восьмой десятичный знакъ. Отсюда видимъ, что съ точностью до единицы седьмага десятичнаго знака, формула $\sin(\vartheta + h) = \sin \vartheta + h \cos \vartheta$ справедлива для всѣхъ значений h , меньшихъ $10''$. Раздѣливъ обѣ части (1) равенства на $\sin \vartheta$, получимъ:

$$\frac{\sin(\vartheta + h)}{\sin \vartheta} = 1 + h \operatorname{ctg} \vartheta.$$

Въ алгебрѣ же доказано, что если $-1 < x < +1$, то

$$\lg(1 + x) = M \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right),$$

гдѣ M есть модуль системы логарифмовъ при основаніи 10 и равенъ 0.43429448 .., поэтому, замѣнивъ x произведемъ $h \operatorname{ctg} \mathcal{S}$, найдемъ:

$$\lg \frac{\sin(\mathcal{S} + h)}{\sin \mathcal{S}} = \lg(1 + h \operatorname{ctg} \mathcal{S}) = M \left(h \operatorname{ctg} \mathcal{S} - \frac{h^2 \operatorname{ctg}^2 \mathcal{S}}{2} + \frac{h^3 \operatorname{ctg}^3 \mathcal{S}}{3} \dots \right) \quad (2)$$

и, если ограничимся первымъ членомъ ряда, то получимъ приблизительно:

$$\lg \frac{\sin(\mathcal{S} + h)}{\sin \mathcal{S}} = M h \operatorname{ctg} \mathcal{S}$$

или

$$\lg \sin(\mathcal{S} + h) - \lg \sin \mathcal{S} = M h \operatorname{ctg} \mathcal{S}. \quad (3)$$

Точно также найдемъ, что, при $h_1 < 10''$,

$$\lg \sin(\mathcal{S} + h_1) - \lg \sin \mathcal{S} = M h_1 \operatorname{ctg} \mathcal{S};$$

откуда

$$\frac{\lg \sin(\mathcal{S} + h) - \lg \sin \mathcal{S}}{\lg \sin(\mathcal{S} + h_1) - \lg \sin \mathcal{S}} = \frac{h}{h_1} \text{ приблизительно.}$$

Для болѣе строгой оцѣнки теоремы, необходимо опредѣлить погрѣшность отъ отбрасыванія въ (2) равенствѣ членовъ съ h^2 , съ h^3 и т. д.; при этомъ замѣтимъ, что наибольшая погрѣшность будетъ отъ члена, содержащаго h^2 , гдѣ $h < 10''$, въ чемъ убѣдиться нетрудно, найдя величины послѣдующихъ членовъ посредствомъ логарифмовъ. Опредѣлимъ величину члена

$\frac{1}{2} M h^2 \operatorname{ctg}^2 \mathcal{S}$, когда $h < 10''$. Модуль $M < \frac{1}{2}$, $h < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4}$, а потому, при откидываніи втораго члена въ (2) равенствѣ, сдѣлаемъ погрѣшность,

меньшую $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10^4} \cdot \operatorname{ctg}^2 \mathcal{S} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \mathcal{S}}{16 \cdot 10^8}$, которая съ измѣненіемъ \mathcal{S}

будетъ измѣняться, а потому, чтобы погрѣшность была бы менѣ

$\frac{1}{10^7}$, необходимо, чтобы $\frac{\operatorname{ctg}^2 \mathcal{S}}{16 \cdot 10^8} < \frac{1}{10^7}$, или $\operatorname{ctg} \mathcal{S} < \sqrt{160}$ или $\operatorname{ctg} \mathcal{S} < 13$;

найдено-же, что $\operatorname{ctg} 5^\circ < 12$ и $\operatorname{ctg} 4^\circ > 14$, а потому \mathcal{S} должно быть болѣе 5° (*). Гдѣ не требуется большой точности, тамъ и для угловъ, меньшихъ 5° , все-таки пользуются этою теоремою.

Чтобы можно было пользоваться этою теоремою для угловъ, меньшихъ 5° , но не очень малыхъ, въ некоторыхъ таблицахъ какъ напр. въ логарифмахъ Вега, помѣщены логарифмы синусовъ для угловъ отъ $1''$ до $1''$ для первыхъ пяти гридусовъ. При углахъ-же очень малыхъ существуютъ другіе приемы для опредѣленія логарифмовъ синусовъ, указанные въ VI отдѣлѣ.

II. Для логарифмовъ косинуса. Если (3) въ равенствѣ поставимъ

$\frac{\pi}{2} - \mathcal{S}$ вмѣсто \mathcal{S} , то получимъ:

*) Величина третьяго члена (2) равенства, т. е. $\frac{1}{3} M h^3 \operatorname{ctg}^3 \mathcal{S}$, при $\mathcal{S} > 5^\circ$ и

$h < 10''$, менѣе: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10^{12}} \sqrt{160^3} = \frac{\sqrt{160}}{3 \cdot 10^{11}} < 0.00000000001$.

$$\lg \sin\left(\frac{\pi}{2} - \mathcal{S} + h\right) - \lg \sin\left(\frac{\pi}{2} - \mathcal{S}\right) = Mh \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \mathcal{S}\right)$$

или

$$\lg \cos(\mathcal{S} - h) - \lg \cos \mathcal{S} = Mh \operatorname{tg} \mathcal{S};$$

поставивъ здѣсь $-h$ вмѣсто h , получимъ

$$\lg \cos(\mathcal{S} + h) - \lg \cos \mathcal{S} = -Mh \operatorname{tg} \mathcal{S}; \dots \dots \dots (4)$$

также найдемъ, что, при $h_1 < 10''$,

$$\lg \cos(\mathcal{S} + h_1) - \lg \cos \mathcal{S} = -Mh_1 \operatorname{tg} \mathcal{S}.$$

Изъ этихъ равенствъ получимъ:

$$\frac{\lg \cos(\mathcal{S} + h) - \lg \cos \mathcal{S}}{\lg \cos(\mathcal{S} + h_1) - \lg \cos \mathcal{S}} = \frac{h}{h_1} \text{ приблизительно};$$

Чтобы ошибка въ этомъ случаѣ была менѣе $\frac{1}{10^7}$, гдѣ $h'' < 10''$ и $h_1 < 10''$, необходимо, чтобы $90^\circ - \mathcal{S} > 5^\circ$, или $\mathcal{S} < 90^\circ - 5^\circ$ или $\mathcal{S} < 85^\circ$.

III. Для логарифмовъ тангенса. Если вычтемъ почленно (4) равенство изъ (3), то получимъ:

$$[\lg \sin(\mathcal{S} + h) - \lg \cos(\mathcal{S} + h)] - [\lg \sin \mathcal{S} - \lg \cos \mathcal{S}] = Mh(\operatorname{ctg} \mathcal{S} + \operatorname{tg} \mathcal{S})$$

или

$$\lg \frac{\sin(\mathcal{S} + h)}{\cos(\mathcal{S} + h)} - \lg \frac{\sin \mathcal{S}}{\cos \mathcal{S}} = Mh \frac{2}{\sin 2\mathcal{S}}$$

или

$$\lg \operatorname{tg}(\mathcal{S} + h) - \lg \operatorname{tg} \mathcal{S} = \frac{2 Mh}{\sin 2\mathcal{S}} \text{ приблизительно, } \dots (5)$$

также для $h_1 < 10''$

$$\lg \operatorname{tg}(\mathcal{S} + h_1) - \lg \operatorname{tg} \mathcal{S} = \frac{2 Mh_1}{\sin 2\mathcal{S}}$$

откуда

$$\frac{\lg \operatorname{tg}(\mathcal{S} + h) - \lg \operatorname{tg} \mathcal{S}}{\lg \operatorname{tg}(\mathcal{S} + h_1) - \lg \operatorname{tg} \mathcal{S}} = \frac{h}{h_1} \text{ приблизительно.}$$

Чтобы въ этомъ случаѣ ошибка была менѣе $\frac{1}{10^7}$, гдѣ $h < 10''$ и $h_1 < 10''$, необходимо, чтобы уголъ \mathcal{S} былъ бы болѣе 5° .

IV. Для логарифмовъ котангенса. Подставивъ въ (5) формулу $\frac{\pi}{2} - \mathcal{S}$ вмѣсто \mathcal{S} , получимъ:

$$\lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \mathcal{S} + h \right) - \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \mathcal{S} \right) = \frac{2 Mh}{\sin(\pi - 2\mathcal{S})},$$

или

$$\lg \operatorname{ctg}(\mathcal{S} - h) - \lg \operatorname{ctg} \mathcal{S} = \frac{2 Mh}{\sin 2\mathcal{S}}.$$

подставивъ здѣсь $-h$ вмѣсто h , найдемъ:

$$\lg \operatorname{ctg}(\mathcal{S} + h) - \lg \operatorname{ctg} \mathcal{S} = -\frac{2 Mh}{\sin 2\mathcal{S}} \text{ приближ.:}$$

также найдемъ, при $h_1 < 10''$, что

$$\lg \operatorname{ctg} (\vartheta + h_1) - \lg \operatorname{ctg} \vartheta = - \frac{2 M h_1}{\sin 2 \vartheta}.$$

Изъ этихъ равенствъ получимъ:

$$\frac{\lg \operatorname{ctg} (\vartheta + h) - \lg \operatorname{ctg} \vartheta}{\lg \operatorname{ctg} (\vartheta + h_1) - \lg \operatorname{ctg} \vartheta} = \frac{h}{h_1} \text{ приближ.}$$

Чтобы ошибка, при употребленіи этой пропорціи, не вліяла на седьмой десятичный знакъ, при $h < 10''$ и $h_1 < 10''$, необходимо, чтобы уголъ ϑ былъ бы менѣе 85° .

ОТДѢЛЪ VI.

Расположеніе и употребленіе логарифмовъ тригонометрическихъ величинъ.

§ 93. Въ этомъ отдѣлѣ будетъ изложено только расположеніе и употребленіе семизначныхъ таблицъ логарифмовъ Вега; расположеніе же и употребленіе пятизначныхъ таблицъ логарифмовъ, изд. мною, читатель найдетъ въ предисловіи къ этимъ таблицамъ.

§ 94. Въ таблицахъ Вега помѣщены семизначные логарифмы синусовъ, косинусовъ, тангенсовъ и котангенсовъ отъ $10''$ до $10''$ для угловъ первой четверти (см. таблицу III, стр. 289) и семизначные логарифмы синусовъ и тангенсовъ отъ $1''$ до $1''$ для первыхъ 5 градусовъ, а слѣдовательно и логарифмы косинусовъ и котангенсовъ отъ 85° до 90° (см. таблицу II, стр. 187).

РАСПОЛОЖЕНІЕ И УПОТРЕБЛЕНІЕ III ТАБЛИЦЫ (стр. 289).

§ 95. Сверху и снизу каждой страницы поставлено число градусовъ, и если прослѣдимъ всю эту таблицу, то увидимъ, что вверху идутъ градусы отъ 0° до 45° , а внизу отъ 45° до 90° . Каждая страница раздѣлена вертикальными линіями на нѣсколько частей: въ первомъ слѣва столбцѣ и послѣднемъ справа (') помѣщены минуты, а во второмъ и предпослѣднемъ (") секунды; при этомъ замѣтимъ, что если беремъ градусы сверху, то минуты и секунды надо взять съ лѣвой стороны той страницы, гдѣ беремъ градусы; а если беремъ градусы снизу, то минуты и секунды

надо взять съ правой стороны этой страницы. Въ столбцахъ, гдѣ написано: \sin , \tan , \cot и \cos помѣщены, соответственно, логарифмы синусовъ, тангенсовъ, котангенсовъ и косинусовъ; также замѣтимъ, что внизу написаны тригонометрическія величины, обратныя тѣмъ, которыя написаны сверху; напр., если сверху написано \sin , то снизу \cos . Это обстоятельство объясняется слѣдующимъ образомъ: одному и тому-же горизонтальному ряду соответствуетъ два угла, смотримъ-ли мы сверху или снизу страницы, сумма которыхъ равна 90° ; такъ, если возьмемъ уголъ въ $25^\circ 16' 40''$ и посмотримъ сколько содержитъ градусовъ, минутъ и секундъ уголъ, соответствующій этому ряду, когда градусы беремъ снизу, то найдемъ: $64^\circ 43' 20''$; откуда и видимъ, что одинъ уголъ служитъ другому дополненіемъ до 90° . Изъ этого выходитъ, что если возьмемъ, напримеръ, логарифмъ синуса для какого нибудь угла и градусы сверху, то онъ также будетъ принадлежать логарифму косинуса угла (дополнительнаго), для котораго градусы беремъ снизу, что и выражено надписями, поставленными сверху и снизу каждого столбца. Подлѣ столбцовъ, въ которыхъ помѣщены логарифмы синуса и косинуса (у косинуса не такъ), имѣется, съ правой руки каждого, столбца съ надписями d . (differentia), въ которыхъ помѣщены разности между двумя послѣдовательными логарифмами синусовъ, а также и косинусовъ. Между логарифмами тангенсовъ и котангенсовъ находится столбецъ съ надписью d с (differentia communis), который содержитъ общія разности между двумя послѣдовательными логарифмами тангенсовъ и котангенсовъ. Такъ, если означимъ буквами α и β два послѣдовательные угла и буквою δ разность между логарифмами тангенсовъ этихъ угловъ, то найдемъ:

$$\delta = \lg \operatorname{tg} \alpha - \lg \operatorname{tg} \beta;$$

но $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ и $\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$ и потому

$$\lg \operatorname{ctg} \alpha = -\lg \operatorname{tg} \alpha \text{ и } \lg \operatorname{ctg} \beta = -\lg \operatorname{tg} \beta;$$

слѣдовательно

$$\lg \operatorname{ctg} \beta - \lg \operatorname{ctg} \alpha = -\lg \operatorname{tg} \alpha - \lg \operatorname{tg} \beta = \delta.$$

Съ боку каждой страницы помѣщены столбцы, въ которыхъ указано: сколько изъ полной разности приходится на $1''$, $2''$, ..., $9''$.

И такъ, если градусъ беремъ сверху, то минуты и секунды надо брать слева той-же страницы, а написаны \sin , \cos , \tan и \cot читать сверху; если-же градусъ беремъ снизу, то минуты и секунды надо брать справа, а написаны \sin , \cos , \tan и \cot читать снизу той-же страницы.

Помощью этой таблицы можемъ рѣшить два вопроса: 1) по данному углу опредѣлить логарифмъ тригонометрической величины его 2) по данному логарифму тригонометрической величины для угла, опредѣлить самый уголъ.

§ 96. По данному углу найти логарифмъ тригонометрической величины этого угла. Здѣсь можетъ быть: 1) что данный уголъ находится въ таблицѣ и 2) что данный уголъ не находится въ таблицѣ. Изъ приведенныхъ ниже примѣровъ будетъ понятно, какъ слѣдуетъ поступать въ томъ и другомъ случаѣ.

Примѣръ I. Опредѣлить $\lg \sin 25^\circ 12' 20''$. Находимъ страницу въ таблицѣ III, гдѣ написано сверху 25° , и въ крайнемъ лѣвомъ столбцѣ $12'$ (441 стр.); затѣмъ идемъ въ низу отъ $12'$ и смотримъ въ сосѣднемъ столбцѣ (") ближайшее число 20; тогда, въ горизонтальномъ ряду съ 20 и въ столбцѣ, гдѣ написано сверху \sin , стоитъ табличнымъ $\lg \sin 25^\circ 12' 20''$, т. е. увеличенный на 10 противъ настоящаго; слѣдовательно

$$\begin{aligned} \lg \sin 25^\circ 12' 20'' &= 9,6292740 = 10 \\ &= 1,6292740. \end{aligned}$$

Примѣръ II. Найти $\lg \cot 72^\circ 45' 30''$. Отыскиваемъ страницу, гдѣ написано снизу 72° и въ крайнемъ правомъ столбцѣ $45'$ (393 стр.); потомъ идемъ къ верху и смотримъ въ смежномъ столбцѣ (гдѣ стоитъ ") , не доходя до $40'$, число 30; искомый табличнымъ логарифмъ находится въ томъ же горизонтальномъ ряду, гдѣ ваяли $30''$, и въ томъ столбцѣ, гдѣ написано снизу \cot ; тамъ найдемъ: 9,4905096. Слѣдовательно

$$\begin{aligned} \lg \cot 72^\circ 45' 30'' &= \frac{9,4905096}{10} = 9,4905096 \\ &= 1,4905096. \end{aligned}$$

Примѣръ III. Найти $\lg \tan 51^\circ 13' 10''$. Рѣшеніе (стр. 523): $\lg \tan 51^\circ 13' 10'' = 0,0950346$.

Примѣръ IV. Найти $\lg \cos 2^\circ 50''$. Рѣшеніе (стр. 302): $\lg \cos 2^\circ 50'' = 1,9997317$.

Примѣръ V. Опредѣлить $\lg \operatorname{tg} 42^\circ 39' 46''$. Въ таблицахъ вѣтъ угла въ $42^\circ 39' 46''$, а есть два ближайшихъ къ нему, изъ которыхъ одинъ болѣе даннаго и равенъ $42^\circ 39' 50''$, а другой менѣе даннаго и равенъ $42^\circ 39' 40''$; беремъ логариомъ тангенса ближайшаго меньшаго угла, т. е. $42^\circ 39' 40''$, и находимъ на стр. 545, что

$$\lg \operatorname{tg} 42^\circ 39' 40'' = 9,9645036.$$

Мы взяли уголъ меньше даннаго на $6''$, а потому и найденный логариомъ меньше настоящаго; слѣдовательно, для полученія искомаго логариома, надо взятый логариомъ увеличить на нѣкоторое число, соответствующее $6''$. На той же страницѣ, гдѣ $\lg \operatorname{tg} 42^\circ 39' 40''$, смотримъ, въ столбцѣ d. c., какова разность между взятымъ логариомомъ и ближайшимъ большимъ и находимъ 423 десятимилліонныхъ; разность же между меньшимъ и большимъ углами равна $10''$; слѣдовательно, на $10''$ приходится 423 десятимилліонныхъ, а на $6''$ неизвѣстно сколько приходится и положимъ x . Въ (§ 92) доказано, что, для одной и той же тригонометрической величины, разности между логариомами двухъ послѣдовательныхъ угловъ, помѣщенныхъ въ таблицахъ, приблизительно пропорциональны разностямъ соответствующихъ имъ угловъ, а потому

$$\frac{10''}{6''} = \frac{423}{x}; \text{ откуда } x = \frac{423 \cdot 6}{10} = 253,8$$

десятимилліоннымъ или просто $x = 254$ десятимилліоннымъ. Придавъ это число къ меньшему логариому: 9,9645036, получимъ искомый табличный логариомъ: 9,9645290. И такъ

$$\begin{aligned} \lg \operatorname{tg} 42^\circ 39' 46'' &= 9,9645290 - 10 \\ &= 1,9645290. \end{aligned}$$

Видно того, чтобы составлять пропорцію для опредѣленія x , можемъ воспользоваться столбцомъ 423, помѣщеннымъ съ боку страницы, гдѣ видимъ, что на $6''$ приходится 253,8 десятимилл. или просто 254 десятимилл.

Вычисленія располагаютъ такъ:

$$\begin{aligned} \lg \operatorname{tg} 42^\circ 39' 40'' &= 9,9645036 - 10. \text{ Табл. разн. } 423. \\ &\quad 6'' \quad \dots + 254 \\ \hline \lg \operatorname{tg} 42^\circ 39' 46'' &= 9,9645290 - 10 \\ &= 1,9645290. \end{aligned}$$

Примѣръ VI. Найти $\lg \sin 78^\circ 36''$, 2. Поступая такъ же, какъ въ предыдущемъ случаѣ, найдемъ (стр. 361):

$$\lg \sin 78^\circ 36'', 2 = \overline{1,9904206}.$$

Примѣръ VII. Найти $\lg \cos 51^\circ 48' 17''$, 26. Въ таблицахъ нѣтъ угла въ $51^\circ 48' 17''$, 26, а есть два ближайше, изъ которыхъ одинъ болѣе даннаго угла и равенъ $51^\circ 48' 20''$, а другой менѣе даннаго и равенъ $51^\circ 48' 10''$. Въ таблицахъ, на стр. 519, находимъ, что

$$\lg \cos 51^\circ 48' 20'' = 9,7912219$$

$$\text{и} \quad \lg \cos 51^\circ 48' 10'' = 9,7912486;$$

откуда видимъ, что искомый логарифмъ заключается между 9,7912219 и 9,7912486 и что большому углу соответствуетъ меньшій логарифмъ: 9,7912219; кромѣ того, замѣчаемъ, что для полученія искомага логарифма слѣдуетъ увеличить меньшій логарифмъ, т. е. соответствующій углу въ $51^\circ 48' 20''$, или уменьшить большій логарифмъ, соответствующій углу въ $51^\circ 48' 10''$. Положимъ, что мы желаемъ воспользоваться меньшимъ логарифмомъ; разность между $51^\circ 48' 20''$ и $51^\circ 48' 17''$, 26 есть $2'',74$, а разность между соответствующими логарифмами неизвѣстна и мы ее означимъ буквою x ; разность же между большимъ и меньшимъ углами равна $10''$, а разность между соответствующими логарифмами (см. столбецъ d) равна 267 десятимл. Намъ извѣстно (§ 92), что разности между двумя табличными логарифмами косинусовъ приблизительно пропорциональны разностямъ между соответствующими имъ углами, а потому получимъ:

$$\frac{10''}{2'',74} = \frac{267}{x}; \text{ откуда } x = \frac{267 \cdot 2,74}{10} = 73,158 \text{ десятимл.}$$

или просто $x = 73$ десятимл.; придавъ 73 десятимл. къ меньшему логарифму 9,7912219, получимъ искомый табличный логарифмъ 9,7912292. И такъ

$$\begin{aligned} \lg \cos 51^\circ 48' 17'', 26 &= 9,7912292 - 10 \\ &= \overline{1,7912292}. \end{aligned}$$

Если воспользуемся $\lg \cos 52^\circ 48' 10''$, то соответствующій ему логарифмъ придется уменьшать на число, соответствующее разности даннаго угла и $52^\circ 48' 10''$, т. е. на $7'',26$. На $10''$ приходится 267 десятимлліонныхъ, а сколько приходится на $7'',26$ неизвѣстно;

положимъ x . Тогда $\frac{10''}{7'',26} = \frac{267}{x}$; откуда $x = \frac{7,26 \cdot 267}{10} = 194,512$ десятимл., или просто, 194 десятимл.ионныхъ.

Слѣдовательно, искомы табличныи логариомъ равенъ: 9,7912486 безъ 194 десятимл. или 9,7912292. Вычисленіе располагають такъ:

$$\begin{array}{r} \lg \cos 52^\circ 45' 10'' = 9,7912486 \\ \quad \quad \quad + 7'',26 \quad \quad \quad - 194 \\ \hline \lg \cos 52^\circ 48' 17'',26 = 9,7912292 - 10 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad = 1,7912292. \end{array}$$

Вмѣсто того, чтобы опредѣлять x изъ пропорци, можемъ воспользоваться столбцомъ, подъ номеромъ 267. Възявъ $\lg \cos 52^\circ 48' 20''$, придется его увеличить на число, соответствующее $2'',74$. въ столбцѣ 267 видимъ, что на $2''$ приходится 53,4; на $0'',7 - 18,69$, а на $0'',04 - 1,068$; всего 73,158 десятимл. или 73 десятимл. Вычисленіе располагають такъ:

$$\begin{array}{r} \lg \cos 52^\circ 48' 20'' = 9,7912219 \dots \text{Табл. разп. 267.} \\ \quad \quad \quad 2'' \dots \dots \dots 53,4 \\ \quad \quad \quad - 0'',7 \dots \dots \dots + 18,69 \\ \quad \quad \quad 0'',04 \dots \dots \dots 1,068 \\ \hline \lg \cos 52^\circ 48' 17'',26 = 9,7912292 - 10 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad = 1,7912292. \end{array}$$

Примѣръ VIII. Найти $\lg \operatorname{ctg} 32^\circ 48'',76$. Поступая какъ въ предъид. случаѣ, найдемъ (стр. 482), что $\lg \operatorname{ctg} 32^\circ 48'',76 = 0,2039823$.

§ 97. По данному логариому тригонометрической величины для угла, опредѣлить соответствующій уголъ. Логариомы каждой изъ тригонометрическихъ величинъ находятся въ двухъ столбцахъ, изъ которыхъ одинъ служитъ продолженіемъ другаго (§ 95); поэтому, отыскивая данный логариомъ, надо пользоваться обоими столбцами. При рѣшеніи предлагаемаго вопроса можетъ быть два случая: 1) данный логариомъ находится въ таблицѣ и 2) данный логариомъ не находится въ таблицѣ. Слѣдующіе примѣры объясняютъ вполне, какъ слѣдуетъ поступать въ томъ и другомъ случаѣ.

Примѣръ I. Дано: $\lg \sin x = 1,7020913$; опредѣлить x .

Для полученія табличнаго логариома синуса, должно прибавить къ данному логариому 10; получимъ 9,7020913. Смотримъ, гдѣ находится число 9,7020913 въ столбцахъ, въ которыхъ написано

сверху или снизу шд, обращая сперва вниманіе на характеристику 9 и первый десятичный знак 7, а потомъ уже и на остальные десятичные знаки, на страницѣ 471 находимъ логарифмъ, равный данному. Такъ какъ надпись шд въ этомъ столбцѣ сверху, то градусы беремъ сверху, а слѣдовательно минуты и секунды слева: при этомъ, секунды беремъ въ томъ же горизонтальномъ ряду, гдѣ стоитъ данный логарифмъ, а минуты беремъ тѣ, которыя стоятъ въ сосѣднемъ столбцѣ (') и нѣсколько выше взятыхъ секундъ. Согласно скаланному, надо будетъ взять 30° , $20''$ и $14'$; слѣдовательно $x = 30^{\circ} 14' 20''$.

Примѣръ II. Дано: $\lg \operatorname{ctg} x = 1,9075080$; опредѣлить x .

Здѣсь логарифмъ котангенса отрицательный, а потому соответствующій уголъ болѣе 45° (§ 90); слѣдовательно, данный логарифмъ находится въ томъ столбцѣ, гдѣ надпись ctg внизу. Чтобы получить табличный логарифмъ, прибавимъ 10 къ данному логарифму, найдемъ: 9,9075080; обращая сперва вниманіе на характеристику 9 и первые десятичные знаки 9, а потомъ и на остальные десятичные знаки, найдемъ на стр. 525 данный логарифмъ. Надпись ctg помѣщена снизу, а потому беремъ градусы также снизу ($51'$), а минуты и секунды справа этой страницѣ; причемъ секунды надо взять въ томъ же горизонтальномъ ряду, гдѣ данный логарифмъ ($20''$), а минуты въ сосѣднемъ столбцѣ и нѣсколько ниже взятыхъ секундъ ($3'$), слѣдовательно $x = 51^{\circ} 3' 20''$.

Примѣръ III. $\lg \operatorname{tg} x = 0,5635125$; опредѣлить x . Рѣшеніе (стр. 381): $x = 74^{\circ} 43' 10''$.

Примѣръ IV. $\lg \cos x = 1,9974041$; опредѣлить x . Рѣшеніе (стр. 327): $x = 6^{\circ} 15' 30''$.

Примѣръ V. $\lg \operatorname{tg} x = 1,9676879$; опредѣлить x .

Для получения табличнаго логарифма прибавимъ 10 къ данному; найдемъ: 9,9676879. Обращая вниманіе на характеристику 9 и первые два десятичных знака 9 и 6, видимъ, на стр. 547, что нѣтъ такого логарифма, а есть ближайшій къ нему и меньшій его: 9,9676715 или ближайшій къ данному и большій его: 9,9677137, между которыми находится данный логарифмъ.

Взявъ ближайшій къ данному логарифму и меньшій его 9,9676715, увидимъ, что ему соответствуетъ уголъ въ $42^{\circ} 52' 10''$, который меньше искомага; поэтому, слѣдуетъ найденный уголъ увеличить на нѣкоторое число секундъ, соответствующее разности между дан-

нымъ и найденнымъ логарифмами, т. е. 164 десятимл.: разность между упомянутыми меньшимъ и большимъ логарифмами равна (см. столбецъ d) 422 десятимл.; слѣд. на 422 десятимл. приходится $10''$, а на 164 десятимл., положимъ, придется y'' . Намъ известно, что разности между логарифмами тангенсовъ угловъ пропорціональны приблизительно разностямъ соответствующихъ угловъ, а потому

$$\frac{y''}{10''} = \frac{164}{422}; \text{ откуда } y'' = \frac{164 \cdot 10''}{422} = 3'',89.$$

И такъ, искомый уголъ $x = 42^\circ 52' 10'' + 3'',89 = 42^\circ 52' 13'',89$.

Нахождение числа секундъ, на которое слѣдуетъ увеличить меньшій уголъ, можно произвести помощью одного изъ столбцовъ, помѣщенныхъ съ боку каждой страницы. Въ самомъ дѣлѣ, найдя разность 422 десятимл. между большимъ и меньшимъ логарифмами относительно даннаго, обращаемся къ столбцу, на верху котораго стоитъ число 422. Разность между меньшимъ и даннымъ логарифмами есть 164; поэтому, отыскиваемъ въ правой сторонѣ этого столбца число 164, а если его нѣтъ, то ближайшее меньшее и находимъ 126,6, которому соответствуетъ $3''$; вычитаемъ 126,6 изъ 164, находимъ 37,4. Найденное число 37,4 умноживаемъ въ 10 разъ, получаемъ 374 и ищемъ въ томъ же столбцѣ ближайшее меньшее число; находимъ 337,6, которому соответствуетъ $8''$. Вычтя 337,6 изъ 374, получимъ 36,4; умноживаемъ его въ 10 разъ и, желая окончить вычисленіе, ищемъ, въ томъ-же столбцѣ, ближайшее число къ 364; находимъ 379,8, которому соответствуетъ $9''$; слѣдовательно 37,4 соответствуетъ $0'',89$, а потому y'' приблизительно равенъ $3'',89$.

Самое вычисленіе располагаютъ такъ:

lg tg x = 9,9676879.	Таб. разн. = 422.	
ближ. меньш. логарф.	715 *) $42^\circ 52' 10''$
	164	
ближ. меньш. число въ 422 столбцѣ:	126,6 $3''$
1-ый остат., увел. въ 10 разъ:	37 4	
ближ. меньш. число въ 422 столбцѣ:	337,6 $0'',8$
2-ой остат., увел. въ 10 разъ:	36 4	
ближайшее число въ 422 столбцѣ:	379,8 $0'',09$;
слѣдовательно $x = 42^\circ 52' 13'',89$.		

*) Первые цифры меньшаго логарифма, одинаковыя съ первыми цифрами даннаго логарифма, обыкновенно не пишутъ.

Примѣръ VI. Дано $\lg \cos x = 1,1752016$. Опредѣлить x .

Для полученія табличнаго логарифма, прибавимъ 10 къ данному x найдемъ: 9,1752016. Обращая вниманіе на характеристику 9 и первые два десятичные знака 1 и 7, находимъ на стр. 341, что такого логарифма въ таблицахъ нѣтъ, а есть два ближайшіе, изъ которыхъ одинъ 9,1753004 болѣе даннаго и соотвѣтствуетъ углу въ $81^\circ 23' 20''$, а другой 9,1751613 меньше даннаго и соотвѣтствуетъ углу въ $81^\circ 23' 30''$. Съ увеличеніемъ угла, въ первой четверти, косинусъ уменьшается, а слѣдовательно и логарифмъ косинуса также уменьшается, и обратно; поэтому, взявши болѣе логарифмъ 9,1753004, видимъ, что соотвѣтствующій ему уголъ въ $81^\circ 23' 20''$ меньше искомаго угла, а потому этотъ уголъ надо увеличить на число секундъ, соотвѣтствующее разности между ближайшимъ большимъ: 9,1753004 и даннымъ: 9,1752016, которая равна 988 десятимл. Означивъ буквою y число секундъ, соотвѣтствующее 988 десятимл., и найдя въ столбцѣ d разность между ближайшимъ меньшимъ и ближайшимъ большимъ логарифмами относительно даннаго, которая равна 1391 десятимл. и которой соотвѣтствуетъ $10''$, можемъ составить пропорцію (§ 92).

$$\frac{y''}{10''} = \frac{988}{1391}; \text{ откуда } y'' = \frac{988 \cdot 10''}{1391} = 7'', 1.$$

Слѣдовательно, искомый уголъ x равенъ $81^\circ 23' 20'' + 7'', 1 = 81^\circ 23' 27'', 1$.

Вмѣсто того, чтобы составлять пропорцію для опредѣленія y'' , можемъ воспользоваться столбцомъ для числа 1391, а если его нѣтъ, то столбцомъ для ближайшаго числа къ 1391, т. е. столбцомъ для числа 1390. Поступая, какъ въ предъидущемъ примѣрѣ, найдемъ:

Ближайш больш. логарифм.	3004	$81^\circ 23' 20''$
$\lg \cos x =$	9,1752016.	Таб. раз. 1391
1-ый остат.	988	
ближайш. меньш. число въ 1390 столб.	973	$7''$
2-ой остат., увел. въ 10 разъ,	150	
Ближ. число въ 1390 столб.	139	
	$0'', 1$	

Слѣдовательно $x = 81^\circ 23' 27'', 1$.

Если бы взяли ближайшій меньшій логарифмъ, то поправку въ секундахъ пришлось бы вычесть изъ $81^\circ 23' 30''$ и получили бы тотъ же самый результатъ.

Примеръ VII. Определить x , когда $\lg \sin x = 9,6247687$. Рѣш. (стр. 439): $x = 24^\circ 55' 39''$, 21.

Примеръ VIII. Определить x , когда $\lg \operatorname{ctg} x = 0,0967543$. Рѣш. (стр. 522): $x = 38^\circ 40' 11''$, 39.

§ 98. Если синусъ угла равняется числу меньшему единицѣ и мало различающемуся отъ 1, то соответствующій уголъ близокъ къ 90° ; въ этомъ случаѣ, отысканіе по III таблицѣ соответствующаго угла будетъ неудобно, потому что, если углы близки къ 90° , то ихъ синусы, а слѣдовательно и логарифмы синусовъ измѣняются очень медленно, такъ что бываетъ, какъ видно изъ таблицъ, по нѣсколькимъ одинаковымъ логарифмовъ: вслѣдствіе этого неизвѣстно, какой именно взять изъ соответствующихъ угловъ. Напр., определить x , когда $\lg \sin x = 1,9999998$; въ таблицѣ видимъ, что тамъ такихъ логарифмовъ синуса находится пять, которымъ соответствуютъ углы: $89^\circ 56' 20''$, $89^\circ 56' 30''$, $89^\circ 56' 40''$, $89^\circ 56' 50''$ и $89^\circ 57'$; слѣдовательно x будетъ равенъ одному изъ предъидущихъ угловъ. Чтобы избѣжать такой неопредѣленности, при рѣшеніи подобныхъ вопросовъ, можемъ воспользоваться слѣдующею формулою: нѣтъ требуется определить x , когда $\sin x = n$, гдѣ n менѣе 1 и мало различается отъ нея; имѣемъ (§ 57):

$$\sin \left(45^\circ - \frac{x}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos (90^\circ - x)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - n}{2}}.$$

Точно также, если надо определить x изъ уравненія $\cos x = m$, гдѣ m положительное число и мало различается отъ 0, то можемъ воспользоваться формулою:

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - m}{2}}.$$

Примѣр. Определить x , когда $\sin x = 0,9999972$. Имѣемъ:

$$\sin \left(45^\circ - \frac{x}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - 0,9999972}{2}} = \sqrt{0,0000014};$$

откуда $\lg \sin \left(45^\circ - \frac{x}{2} \right) = \frac{\lg 0,0000014}{2} = \bar{3},0730840$ и $45^\circ - \frac{x}{2} = -4' 4'', 11$, слѣд. $x = 89^\circ 51' 51'', 78$.

§ 99. Теперь определяемъ: съ какою точностію находить углы, когда даны семизначные логарифмы тригонометрическихъ величинъ. Назначимъ буквою d табличную разность; она приходится

на $10''$, а потому дробь $\frac{10'}{d}$ соответствуетъ измѣненію угла, когда логарифмъ измѣняется на единицу 7-го десятичнаго знака; слѣд. ошибка при опредѣленіи угла можетъ простирается до $\frac{10''}{d}$. Разсматривая таблицу, видимъ, что для синусовъ угловъ близкиихъ къ 90° , а также косинусовъ малыхъ угловъ, разность $d <$ или $= 1$; слѣд. дробь $\frac{10''}{d}$ можетъ простирается до $10''$ и болѣе, такъ что углы близкіе къ 90° дурно опредѣляютъ чрезъ ихъ синусы, а углы близкіе къ 0° — чрезъ ихъ косинусы.

Для тангенсовъ и котангенсовъ самая малая разность 421 при углѣ въ 45° , а потому наибольшая величина дроби $\frac{10''}{d} = \frac{10''}{421} = 0'',03$. Поэтому, если уголъ отыскивается по тангенсу или котангенсу, то ошибка, при опредѣленіи его, не можетъ быть болѣе $0'',03$.

РАСПОЛОЖЕНІЕ И УПОТРЕБЛЕНІЕ II ТАБЛИЦЫ (стр. 187).

§ 100. Когда уголъ заключается между 0° и 5° и не находится въ таблицѣ, то логарифмъ синуса или логарифмъ тангенса такого угла, вообще говоря, не можетъ быть вѣрно опредѣленъ съ помощію таблицы III, потому что пропорція, служащая для опредѣленія поправки логарифма, не всегда даетъ результаты съ точностью до 0,0000001 (§ 92); то-же самое можемъ сказать и о логарифмахъ косинуса и котангенса для угловъ, которые не находятся въ таблицѣ и заключаются между 85° и 90° (§ 92); точно также и при рѣшеніи обратныхъ вопросовъ въ вышеупомянутыхъ случаяхъ, окажется ошибка въ опредѣленіи поправки. Для устранения, до нѣкоторой степени, этихъ погрѣшностей, составлена таблица II, гдѣ помѣщены отъ $1''$ до $1''$ логарифмы синусовъ и тангенсовъ для угловъ въ промежуткѣ отъ 0° до 5° , а слѣдовательно и логарифмы косинусовъ и котангенсовъ въ промежуткѣ отъ 85° до 90° . Вслѣдствіе уменьшенія промежутка между послѣдующими углами, возможно, въ указанныхъ случаяхъ, пользоваться пропорціею (§ 92).

§ 101. На каждой страницѣ этой таблицы, сверху, написано \sin или $\tan g$ для угловъ въ промежуткѣ отъ 0° до 5° , а снизу написано, соответственно, \cos и $\cot g$ для угловъ въ про-

межутѣ отъ 85° до 90° ; минуты стоятъ сверху и снизу каждой страницы, а секунды справа и слѣва каждой-же страницы. При употребленіи этихъ таблицъ, если берутъ градусы сверху, то минуты надо взять также сверху, а секунды на этой-же страницѣ слѣва; если-же градусы будутъ снизу, то минуты надо взять также снизу, а секунды на той-же страницѣ справа. Въ этой таблицѣ ко всѣмъ логарифмамъ прибавлено по 10.

§ 102. По данному углу найти логарифмъ тригонометрической величины этого угла. *Примръ I.* Найти $\lg \sin 2^{\circ} 16' 48''$.

Отыскиваемъ страницу, гдѣ написано сверху $\sin 2^{\circ}$, и подъ нимъ $16'$ (232 стр.); затѣмъ, на этой-же страницѣ, беремъ слѣва $48''$ и идемъ по горизонтальному ряду вправо до тѣхъ поръ, пока не попадемъ въ столбецъ, гдѣ написано сверху $16'$; здѣсь и находится искомый табличныи логарифмъ: 8,5996976; слѣдовательно

$$\begin{aligned} \lg \sin 2^{\circ} 16' 48'' &= 8,5996976 - 10 \\ &= \overline{2},5996976. \end{aligned}$$

Примръ II. Найти $\lg \operatorname{ctg} 89^{\circ} 59' 26''$.

Отыскиваемъ страницу, гдѣ написано внизу ея $\operatorname{ctg} 89^{\circ}$ и внизу же столбца $59'$ (стр. 189); затѣмъ, на этой же страницѣ, беремъ справа $26''$ и идемъ влѣво по горизонтальному ряду до тѣхъ поръ, пока не попадемъ въ столбецъ, гдѣ написано внизу $59'$; здѣсь и находится искомый табличныи логарифмъ: 6,2170538; слѣдовательно

$$\lg \operatorname{ctg} 89^{\circ} 59' 26'' = 4,2170538.$$

Примръ III. Найти $\lg \operatorname{tg} 4^{\circ} 16'', 84$.

Въ таблицѣ угла $4^{\circ} 16'', 84$ нѣтъ, а потому беремъ логарифмъ тангенса угла, ближайшаго къ данному и меньшаго его; получаемъ:

$$\lg \operatorname{tg} 4^{\circ} 0' 16'' = 8,8451276.$$

Этотъ логарифмъ меньше даннаго и потому его слѣдуетъ увеличить на число, соответствующее $0'',84$, которое означимъ буквою x . Разность между $\lg \operatorname{tg} 4^{\circ} 16''$ и $\lg \operatorname{tg} 4^{\circ} 17''$ есть 302 десятимлн., а разность между соответствующими углами равна $1''$; поэтому, на основаніи § 92, получимъ:

$$\frac{0'',84}{1''} = \frac{x}{302}; \text{ откуда } x = 302,0,84$$

или $x = 254$ десятимлліоннымъ.

И такъ

$$\begin{array}{r} \lg \operatorname{tg} 4^{\circ} 16'' = 8,8451276 \\ + 0'',84 \quad + 254 \\ \hline \lg \operatorname{tg} 4^{\circ} 16'',84 = 8,8451530 - 10 \\ = 2,8451530. \end{array}$$

Примѣръ IV. Найти $\lg \sin 1^{\circ} 48' 0'', 46$.

Рѣшеніе сходно съ предыдущимъ; найдемъ (стр. 224):

$$\lg \sin 1^{\circ} 48' 0'', 46 = 2,4971092.$$

Примѣръ V. Найти $\lg \operatorname{ctg} 86^{\circ} 54' 16'', 45$.

Угла въ $86^{\circ} 54' 16'', 45$ въ таблицѣ нѣтъ, а потому беремъ ближайшій большій уголъ къ данному, т. е. $86^{\circ} 54' 17''$ и находимъ:

$$\lg \operatorname{ctg} 86^{\circ} 54' 17'' = 8,7329998.$$

Этотъ логарифмъ будетъ меньше настоящаго (§ 90), а потому его надо увеличить на число, соответствующее $0'',55$ *); означимъ это число буквою x . Разность между взятымъ логарифмомъ 8,7329998 и ближайшимъ большимъ равна 390 десятимл., а разность между соответствующими углами равна $1''$; поэтому, на основаніи § 92, получимъ:

$$\frac{0'',55}{1''} = \frac{x}{390}; \text{ откуда } x = 215 \text{ десятимл.}$$

И такъ

$$\begin{array}{r} \lg \operatorname{ctg} 86^{\circ} 54' 17'' = 8,7329998 \\ - 0'',55 \quad + 215 \\ \hline \lg \operatorname{ctg} 86^{\circ} 54' 16'',45 = 8,7330213 - 10 \\ = 2,7330213. \end{array}$$

Примѣръ VI. Найти $\lg \cos 86^{\circ} 39' 48'', 06$. Рѣшеніе (стр. 194):

$$\lg \cos 89^{\circ} 39' 48'', 06 = 3,7699535.$$

§ 103. По данному логарифму тригонометрической величины для угла, опредѣлить самый уголъ. *Примѣръ I.* Дано: $\lg \sin x = 2,7313522$; опредѣлить x .

Для полученія табличнаго логарифма, прибавимъ къ данному логарифму 10; найдемъ: 8,7313522. Обращая сперва вниманіе на характеристику 8 и первые два десятичные знака 7 и 3, ищемъ данный логарифмъ на тѣхъ страницахъ, гдѣ написано \sin ; на

*) $86^{\circ} 54' 17'' - 86^{\circ} 54' 16'', 45 = 0'',55$.

страницѣ 248, на верху которой написано $\sin \alpha$, находимъ данный логарифмъ; на верху столбца, гдѣ находится данный логарифмъ, стоимъ $5'$, а въ горизонтальномъ ряду съ этимъ логарифмомъ, на лѣвой сторонѣ страницы, стоимъ $17'$. Слѣдовательно $\alpha = 3^\circ 5' 17''$.

Примѣръ II. Определить x , когда $\lg \cos x = 3,9335428$.

Рѣш. На стр. 196 находимъ, что $x = 89^\circ 30' 30''$.

Примѣръ III. Дано $\lg \lg x = 2,6632000$; определить x .

Для полученія табличнаго логарифма прибавимъ 10 къ данному; найдемъ: 8,6632000. Въ таблицѣ не находимъ такого логарифма, а потому на стр. 241 беремъ ближайшій и менший логарифмъ: 8,6631935, которому соответствуетъ $2^\circ 38' 11''$; онъ менше данного на 65 десятиллионныхъ, а слѣдовательно и уголъ $2^\circ 38' 11''$ менше искомаго и потому его надо увеличить на число секундъ, соответствующихъ 65 десятиллионнымъ; искомое число секундъ означимъ буквою y . Разность между ближайшимъ большимъ и ближайшимъ меньшимъ логарифмами относительно данного равна: $8,6632093 - 8,6631935 = 0,0000158$ десятимл., а разность между соответствующими углами равна $1''$; на основаніи теоремы § 92, получимъ:

$$\frac{65}{158} = \frac{y''}{1''}, \text{ откуда } y'' = \frac{65''}{158} = 0'', 41.$$

И такъ: $x = 2^\circ 38' 11'' + 0'', 41 = 2^\circ 38' 11'', 41$.

Примѣръ IV. $\lg \sin x = 2,7188176$; определить x . Рѣш. (стр. 248): $x = 3^\circ 0'', 384$.

Примѣръ V. Дано: $\lg \cos x = 2,8924268$; определить x .

Рѣшеніе (стр. 276):

Ближ. больш.	439	. . .	$85^\circ 31' 22''$
$\lg \cos x =$	<u>8,8924268</u>		Таб. разн. 268.
	y''	171	
	$1''$	— 268;	

слѣдовательно

$$\frac{171}{268} = \frac{y''}{1''}; \text{ откуда } y'' = \frac{171''}{268} = 0'', 638.$$

Итакъ $x = 85^\circ 31' 22'', 638$.

Примѣръ VI. Дано: $\lg \operatorname{ctg} x = 2,3118$; определить x . Рѣш. (стр. 211): $x = 88^\circ 49' 31'', 715$.

Способы нахождения логарифмовъ синуса и тангенса для угловъ, близкихъ къ нулю, а также логарифмовъ косинуса и котангенса для угловъ, близкихъ къ прямому.

§ 104. Когда уголъ близокъ къ нулю, то, при нахожденіи логарифмовъ синуса и тангенса такого угла, употребленіе пропорціи, определяющей поправку логарифма тригонометрической величины для угла, не будетъ достаточно точнымъ даже и при пользованіи таблицей II: тоже можно замѣтить и о рѣшеніи обратнаго вопроса помощію этой таблицы. Сказанное нами относится также и до логарифмовъ косинуса и котангенса для угловъ, близкихъ къ 90°. Въ этихъ случаяхъ прибѣгаютъ къ другимъ приемамъ, указаннымъ ниже.

§ 105. *Первый способъ.* Пусть \mathcal{S} означаетъ круговую мѣру угла въ n'' ; тогда получимъ (§ 74). $\mathcal{S} = n \sin 1''$. Следовательно

$$\lg \frac{\sin \mathcal{S}}{\mathcal{S}} = \lg \frac{\sin n''}{n \sin 1''} = \lg \sin n'' - \lg n - \lg \sin 1'';$$

откуда

$$\lg \sin n'' = \left(\lg \frac{\sin \mathcal{S}}{\mathcal{S}} + \lg \sin 1'' \right) + \lg n; \dots \dots (1)$$

значитъ для опредѣленія $\lg \sin n''$ надо опредѣлить сумму, $\lg \frac{\sin \mathcal{S}}{\mathcal{S}} + \lg \sin 1''$ и въ ней придать $\lg n$.

Изъ (1) равенства можно также опредѣлить число секундъ въ углѣ, близкомъ нулю, когда данъ логарифмъ синуса этого угла. Въ самомъ дѣлѣ изъ (1) равенства имѣемъ:

$$\lg n = \lg \sin n'' - \left(\lg \frac{\sin \mathcal{S}}{\mathcal{S}} + \lg \sin 1'' \right) \dots \dots (2)$$

Подобно этимъ равенствамъ можно получить и для тангенса:

$$\lg \operatorname{tg} n'' = \left(\lg \frac{\operatorname{tg} \mathcal{S}}{\mathcal{S}} + \lg \operatorname{tg} 1'' \right) + \lg n \dots \dots (3)$$

и
$$\lg n = \lg \operatorname{tg} n'' - \left(\lg \frac{\operatorname{tg} \mathcal{S}}{\mathcal{S}} + \lg \operatorname{tg} 1'' \right) \dots \dots (4)$$

Суммы $\lg \frac{\sin \mathcal{S}}{\mathcal{S}} + \lg \sin 1''$ и $\lg \frac{\operatorname{tg} \mathcal{S}}{\mathcal{S}} + \lg \operatorname{tg} 1''$ вычислилъ французскій ученый *Деламбръ* для угловъ въ промежуткѣ отъ 0° до 3°; эти суммы, расположенныя въ надлежащемъ порядкѣ, извѣстны подъ названіемъ *таблицы Деламбра*.

§ 106. Таблицы Деламбра помѣщены вверху на каждой страницѣ I таблицы логарифмовъ Вега и въ пятизначныхъ таблицахъ логарифмовъ, изданныхъ мною, тоже вверху на каждой страницѣ I таблицы. Тамъ стоятъ числа секунды, равныя соответствующимъ числамъ градусовъ, минутъ и се-

кунцъ*) и рядомъ съ ними два столбца S и T, въ которыхъ помѣщены логарифмы, въ семизначныхъ таблицахъ, съ семью десятичными знаками, а въ пятизначныхъ, съ пятью десятичными знаками, потому что первыя цифры 4,685 принадлежатъ всѣмъ логарифмамъ первого и второго столбцовъ, гдѣ стоитъ S тамъ помѣщена сумма:

$$\lg \frac{\sin S}{S} + \lg \sin 1'', \text{ а гдѣ T — сумма } \lg \frac{\lg S}{S} + \lg \lg 1''.$$

Примѣръ I. Найти $\lg \sin 1^{\circ}12'48'',8$.

Внизу страницъ I таблицы ищемъ данный уголъ, а если его тамъ нѣтъ, то ближайшій; на стр. 73 находимъ ближайшій уголъ: $1^{\circ}12'50''$ и рядомъ съ нимъ въ столбцѣ S число 4,6855424. Кроме того тамъ-же видимъ, что $1^{\circ}12'40'' = 4360''$; следовательно данный уголъ равенъ $4368'',8$. По формулѣ (1) получимъ (табличный логарифмъ):

$$\lg \sin 1^{\circ}12'48'',8 = 4,6855424 + \lg 4368,8 - 4,6855424 + 3,6403622 - 8,3259046;$$

следовательно $\lg \sin 1^{\circ}12'48'',8 = 2,3259046$.

Примѣръ II. Найти $\lg \operatorname{tg} 1'16'',348$.

Внизу страницъ I таблицы ищемъ ближайшій уголъ къ $1'16'',348 = 76'',348$ и на стр. 2 находимъ ближайшій уголъ въ $100''$, которому въ столбцѣ T соответствуетъ 4,6855749. По формулѣ (3) получимъ табличный логарифмъ $\operatorname{tg} 1'16'',348$, а именно:

$$\lg \operatorname{tg} 1'16'',348 = 4,6855749 + \lg 76,348 - 4,6855749 + 1,8827977 = 6,5683726;$$

следовательно

$$\lg \operatorname{tg} 1'16'',348 = \bar{4},5683726.$$

Примѣръ III. Найти $\lg \cos 89^{\circ}42'',85$.

Имѣемъ (стр. 57). $\lg \cos 89^{\circ}42'',85 = \lg \sin 59'17'',15 = 2,2366555$.

Примѣръ IV. Определить $\lg \operatorname{ctg} 88^{\circ}7'36'',4$.

Имѣемъ (стр. 120): $\lg \operatorname{ctg} 88^{\circ}7'36'',4 = \lg \operatorname{tg} 1^{\circ}52'23'',6 = \bar{2},5146213$.

Примѣръ V. $\lg \sin n = \bar{3},1234567$; определить n .

Прибавивъ къ данному логарифму 10, ищемъ въ III таблицѣ уголъ, котораго логарифмъ синуса будетъ ближайшимъ къ данному логарифму, и находимъ на 290 стр. $4'30'' = 270''$; смотримъ внизу страницъ I таблицы, въ столбцѣ S, число, соответствующее $270''$ (если нѣтъ $270''$, то беремъ ближайшее число секундъ) и находимъ (стр. 3) 4,6855748. Тогда, по (2) формулѣ, получаемъ: $\lg n = 7,1234567 - 4,6855748 = 2,4378819$; откуда $n = 274,083$, следовательно искомый уголъ равенъ $274'',083 = 4'34'',083$.

Примѣръ VI. Дано: $\lg \operatorname{tg} n = \bar{2},2427000$; определить n . Рѣш. (стр. 58). $n = 1^{\circ}6'',459$.

*) Эти равенства служатъ для облегченія обрашенія градусовъ, минутъ и секундъ въ секунды и обратно. Такъ, напр., если надо обратить $2^{\circ}16'47''$ въ секунды, то на стр. 150 находимъ, что $2^{\circ}16'40'' = 8200''$, а потому $2^{\circ}16'47'' = 8207''$. Положимъ еще, напр., что надо превратить $6632''$ въ градусы, минуты и секунды; на стр. 118 находимъ, что $6630'' = 1^{\circ}50'30''$, а потому $6632'' = 1^{\circ}50'32''$.

Примѣръ VII. $\lg \cos n = 2,2181679$; опредѣлить n . Сперва ищемъ уголь n_1 , для котораго $\lg \sin n_1 = 2,2181679$; находимъ (стр. 55) $n_1 = 56'48'',888$ и тогда $n = 90^\circ - n_1 = 89^\circ 3'11'',112$.

Примѣръ VIII. $\lg (\operatorname{ctg} n) = 2,2646102$; опредѣлить n . Рѣш. (стр. 61): $n = 88^\circ 56'46'',968$.

§ 107. Надо замѣтить, что для $\frac{\sin \mathcal{Z}}{\mathcal{Z}}$ беремъ приближенную величину; а мы видѣли въ § 85, что когда \mathcal{Z} мало, то $\frac{\sin \mathcal{Z}}{\mathcal{Z}}$ равенъ почти $1 - \frac{\mathcal{Z}^2}{6}$; следовательно, если \mathcal{Z} мало, то замѣна \mathcal{Z} приближенной величиною не окажетъ вліянія на ту точность, съ которою производимъ вычисленіе, потому что $\lg \frac{\sin \mathcal{Z}}{\mathcal{Z}}$ измѣняется менѣе быстро нежели \mathcal{Z} .

§ 108. Кромѣ указаннаго способа есть еще другой способъ, принадлежащій Маскеліну (Masquelune); онъ употребляется въ томъ случаѣ, когда нѣтъ таблицъ, указанныхъ въ предыдущихъ §§.

Въ IV отдѣлѣ имѣли, что при малой величинѣ \mathcal{Z} ,

$$\sin \mathcal{Z} = \mathcal{Z} - \frac{\mathcal{Z}^3}{6} \quad \text{и} \quad \cos \mathcal{Z} = 1 - \frac{\mathcal{Z}^2}{2};$$

слѣдовательно

$$\frac{\sin \mathcal{Z}}{\mathcal{Z}} = 1 - \frac{\mathcal{Z}^2}{6} = \left(1 - \frac{\mathcal{Z}^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{приблизительно}$$

или

$$\frac{\sin \mathcal{Z}}{\mathcal{Z}} = (\cos \mathcal{Z})^{\frac{1}{3}} \quad \text{приблизительно};$$

откуда

$$\sin \mathcal{Z} = \mathcal{Z} \cos^{\frac{1}{3}} \mathcal{Z}.$$

Положимъ, что \mathcal{Z} содержитъ n'' ; тогда (§ 74) $\mathcal{Z} = n \sin 1''$ и слѣдовательно

$$\sin n'' = n \sin 1'' \cos^{\frac{1}{3}} n'';$$

откуда

$$\lg \sin n'' = \lg n + \lg \sin 1'' + \frac{1}{3} \lg \cos n'' \quad . \quad . \quad (5)$$

или

$$\lg n = \lg \sin n'' - \lg \sin 1'' - \frac{1}{3} \lg \cos n'' \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Равенство (5) служитъ для опредѣленія логарифма синуса даннаго угла, а равенство (6) — для рѣшенія обратнаго вопроса. Также замѣтимъ, что при малыхъ величинахъ n'' , $\lg \cos n''$ измѣняется медленно, а потому употребленіе приближенной величины $\lg \cos n''$, при опредѣленіи $\lg \sin n''$ или $\lg n$, можетъ быть допущено.

Подобными же формулы можно получить и для тангенса

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \mathcal{S} &= \frac{\sin \mathcal{S}}{\cos \mathcal{S}} = \left(\mathcal{S} - \frac{\mathcal{S}^3}{6} \right) : \left(1 - \frac{\mathcal{S}^2}{2} \right) = \left(\mathcal{S} - \frac{\mathcal{S}^3}{6} \right) \left(1 - \frac{\mathcal{S}^2}{2} \right)^{-1} \\ &= \left(\mathcal{S} - \frac{\mathcal{S}^3}{6} \right) \left(1 + \frac{\mathcal{S}^2}{2} \right) \text{ приблизительно,} \end{aligned}$$

или

$$\operatorname{tg} \mathcal{S} = \left(1 - \frac{\mathcal{S}^2}{6} \right) \left(1 + \frac{\mathcal{S}^2}{2} \right) - 1 + \frac{\mathcal{S}^2}{3} \text{ приближ.}$$

или

$$\operatorname{tg} \mathcal{S} = \left(1 - \frac{\mathcal{S}^2}{2} \right)^{-\frac{2}{3}} = (\cos \mathcal{S})^{-\frac{2}{3}} \text{ приближ.;}$$

отсюда

$$\operatorname{tg} \mathcal{S} = \mathcal{S} (\cos \mathcal{S})^{-\frac{2}{3}}$$

Положим, что \mathcal{S} содержит n'' ; тогда (§ 74) $\mathcal{S} = n \operatorname{tg} 1''$ и

$$\operatorname{tg} n'' = n \operatorname{tg} 1'' (\cos n'')^{-\frac{2}{3}};$$

откуда

$$\lg \operatorname{tg} n'' = \lg n + \lg \operatorname{tg} 1'' - \frac{2}{3} \lg \cos n'' \quad (7)$$

или

$$\lg n = \lg \operatorname{tg} n'' - \lg \operatorname{tg} 1'' + \frac{2}{3} \lg \cos n'' \quad (8)$$

Пример I. Найти $\lg \sin 16'4'',64$.

По формул (5) получим табличный логарифм.

$$\begin{aligned} \lg \sin 16'4'',64 - \lg \sin 96'4'',64 &= \lg 96'4'',64 + \lg \sin 1'' + \frac{1}{3} \lg \cos 16'4'',64 = \\ &= 2,9843653 + 4,6855749 + \frac{1}{3} \cdot 1,9999984 = 7,6699386. \end{aligned}$$

Пример II. $\lg \operatorname{tg} n'' = 2,2427000$, определить n .

Табличный $\lg \operatorname{tg} n'' = 8,2427000$ и потому, по формул (8), получим:

$$\lg n = 8,2427000 - 4,6855749 + \frac{2}{3} \cdot 1,9999984 = 3,5570808; **$$

откуда $n = 3606,457$; следовательно искомый угол равен $3606'',457 = 1^{\circ}6'',457$.

Пример III. $\lg \sin x = \bar{3},0625217$; определить x .

По формул (6) получим:

$$\lg x = 7,0825217 - 4,6855749 - \frac{1}{3} \cdot 1,9999997 = 2,3969469;$$

откуда $x = 249'',49 = 4^{\circ}9'',49$.

Пример IV. $\lg \operatorname{ctg} x = \bar{2},2745532$; определить x .

Ищем угол x , для которого $\lg \operatorname{tg} x = \bar{2},2745532$, и находим:

$\alpha = 1^{\circ}4'40'',852$; откуда $x = 90^{\circ} - \alpha = 88^{\circ}55'19'',148$.

*) Табличный $\lg \sin 1'' = \lg \operatorname{tg} 1'' = 4,6855749$.

***) $\lg \cos n''$ определяем приближенно так: смотрим в таблицу логарифмов тригонометрических величин, в столбце tang , ближайший логарифм к данному, затем идем вправо по горизонтальному ряду и в столбце \cos находим приближенную величину $\lg \cos n''$.

§ 109. Этотъ отдѣлъ закончимъ рѣшеніемъ нѣсколькихъ примѣровъ на вычисленіе.

Примѣръ I. Опредѣлить x изъ уравненія:

$$\operatorname{ctg} x = \sqrt[48]{\sin 76^{\circ} 19' 39'', 46}.$$

Имѣемъ:

$$\lg \operatorname{ctg} x = \frac{\lg \sin 76^{\circ} 19' 39'', 46}{48};$$

но $\lg \sin 76^{\circ} 19' 39'', 46 = 1,9875157$, а потому

$$\lg \operatorname{ctg} x = \frac{1,9875157}{48} \quad \text{или} \quad \lg \operatorname{ctg} x = 1,9997399;$$

откуда, подыскавъ въ таблицѣ логарифмовъ тригонометрическихъ величинъ уголъ x , соответствующій найденному логарифму, получимъ:

$$x = 45^{\circ} 1' 1'', 76.$$

Примѣръ II. Опредѣлить величину дроби: $\frac{\sqrt[17]{0,0728648}}{(\operatorname{tg} 42^{\circ} 43'', 06)^{-0,42}}$.

Означивъ буквою x величину искомой дроби, найдемъ:

$$\lg x = \frac{\lg 0,0728648}{17} + 0,42 \lg \operatorname{tg} 42^{\circ} 43'', 06;$$

но $\lg 0,0728648 = \bar{2},8625178$, $\lg \operatorname{tg} 42^{\circ} 43'', 06 = \bar{1},9546197$,

$\frac{1}{17} \lg 0,0728648 = 1,9330893$, $0,42 \lg \operatorname{tg} 42^{\circ} 43'', 06 = -0,0190597$,
а потому

$$\lg x = \bar{1},9330893 - 0,0190597$$

или

$$\lg x = 1,9140296; \quad \text{откуда} \quad x = 0,8204075.$$

Примѣръ III. Найти x изъ уравненія:

$$\sin x = \frac{1,6 - (\operatorname{tg} 52^{\circ} 4' 8'', 7)^{\frac{12}{25}}}{\sqrt[45]{0,8 (\cos 36^{\circ} 18' 37'')^{1,5}}}.$$

Въ числитель находится разность, а потому прежде всего найдемъ величину этой разности; для этого опредѣлимъ сначала величину вычитаемаго: $(\operatorname{tg} 52^{\circ} 4' 8'', 7)^{\frac{12}{25}}$, такъ какъ уменьшаемое 1,6 есть число извѣстное.

Положивъ:

$$(\operatorname{tg} 52^{\circ} 4' 8'', 7)^{-\frac{12}{25}} = y,$$

найдемъ:

$$\lg y = -\frac{12}{25} \lg \operatorname{tg} 52^{\circ} 4' 8'', 7;$$

но $\lg \operatorname{tg} 52^{\circ} 4' 8'', 7 = 0,1082699$, а потому

$$\lg y = -\frac{12}{25} \cdot 0,1082699 = -0,48 \cdot 0,1082699 = -0,051969552$$

или

$$\lg y = \overline{1,9480304};$$

откуда

$$y = 0,8872182.$$

Слѣдовательно

$$\sin x = \frac{1,6 - 0,8872182}{\sqrt{0,8 (\cos 36^{\circ} 18' 37'')^{1,3}}} \quad \text{или} \quad \sin x = \frac{0,7127818}{\sqrt{0,8 (\cos 36^{\circ} 18' 37'')^{1,3}}}$$

$$\text{а} \quad \lg \sin x = \lg 0,7127818 - \frac{1}{45} (\lg 0,8 + 1,6 \lg \cos 36^{\circ} 18' 37'').$$

Имѣемъ:

$$\begin{array}{r} \lg 0,7127818 = 1,8529566 \\ \lg \cos 36^{\circ} 18' 37'' = 1,9062392 \\ 1,6 \lg \cos 36^{\circ} 18' 37'' = 1,8499827 \\ \hline + \lg 0,8 = 1,9030900 \\ \hline 1,7530727 \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{1}{45} \cdot 1,7530727 = 1,9945127; \end{array}$$

потому

$$\lg \sin x = \overline{1,8529566} - \overline{1,9945127}$$

или

$$\lg \sin x = \overline{1,8584439}; \text{ откуда } x = 46^{\circ} 12' 25'', 25.$$

Примѣръ IV. Вычислить: $\operatorname{tg} \cos 46^{\circ} 17''$.

Означимъ величину $\operatorname{tg} \cos 46^{\circ} 17''$ буквою x и найдемъ сперва величину $\cos 46^{\circ} 17''$; имѣемъ:

$$\lg \cos 46^{\circ} 17'' = 1,8417342; \text{ откуда } \cos 46^{\circ} 17'' = 0,6945990.$$

Выразивъ число 0,6945990 въ градусахъ, какъ показано въ § 14, найдемъ: $39^{\circ} 47' 51'', 33$; слѣдовательно:

$$x = \operatorname{tg} 39^{\circ} 47' 51'', 33, \text{ а } \lg x = \overline{1,9206958};$$

откуда $x = 0,8330975$. И такъ

$$\operatorname{tg} \cos 46^{\circ} 17'' = 0,8330975.$$

Примѣръ V. Вычислить: $x = \sqrt[10]{\operatorname{ctg} \left(\sin \frac{2}{\pi} \right)^{0,05}}$.

Прежде всего найдемъ величину дроби: $\frac{2}{\pi}$ и выразимъ ее въ градусахъ; получимъ:

$$\frac{2}{\pi} = 0,6366197 = 36^{\circ} 28' 32'', 25;$$

тогда

$$y = \left(\sin \frac{2}{\pi} \right)^{-0,05} = \left(\sin 36^{\circ} 28' 32'', 25 \right)^{-0,05},$$

а $\lg y = -0,05 \cdot \lg \sin 36^{\circ} 28' 32'', 25 = 0,0112931$;

откуда $y = 1,0263444$.

Выразивъ найденную дугу: 1,0263444 въ градусахъ, получимъ:

$y = 58^{\circ} 48' 18'', 72$ и

$$r = \sqrt[10]{\operatorname{ctg} 58^{\circ} 48' 18'', 72};$$

откуда x уже легко опредѣлить. Окончательный результатъ: $x = 0,9949955$.

Примѣръ VI. Найти $\sqrt[16]{0,08}^{\cos 0,01}$.

Выразивъ 0,01 въ градусахъ, получимъ: $0,01 = 34' 22'', 64$ и

$$x = \left(\sqrt[16]{0,08} \right)^{\cos 34' 22'', 64};$$

откуда

$$\lg x = \cos 34' 22'', 64 \cdot \frac{\lg 0,08}{16} = \cos 34' 22'', 64 \cdot \frac{1,09691}{16};$$

перемѣнивъ въ обѣихъ частяхъ знаки на обратные, найдемъ:

$$-\lg x = \cos 34' 22'', 64 \cdot \frac{1,09691}{16} \text{ и}$$

$$\lg (-\lg x) = \lg \cos 34' 22'', 64 + \lg 1,09691 - \lg 16 = \bar{2},8360292.$$

Отыскавъ соответствующее число полученному логарифму, найдемъ:

$$-\lg x = 0,0685534, \text{ или } \lg x = -0,0685534$$

или

$$\lg x = \bar{1},9314466;$$

откуда $x = \left(\sqrt[16]{0,08} \right)^{\cos 0,01} = 0,8539779$.

ОТДѢЛЪ VII.

Приведеніе формулъ къ виду, удобному для логарифмическихъ вычисленій. —
Рѣшеніе уравненій второй и третьей степени съ однимъ неизвѣстнымъ помощью
тригонометрическихъ таблицъ.

§ 110. Приведеніе формулъ къ виду, удобному для логарифмическихъ вычисленій. Въ алгебрѣ видѣли, что, при опредѣленіи по логарифмамъ численной величины выраженій, можно логарифмировать непосредственно только тѣ изъ нихъ, которыя не содержатъ суммы или разности. Съ помощью тригонометрическихъ величинъ можно привести формулу, содержащую сумму или разность, къ виду, удобному для логарифмическаго вычисления, т. е. къ такому, гдѣ входятъ дѣйствія умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корня; это можно сдѣлать или чрезъ непосредственное преобразование самыхъ формулъ, какъ видѣли въ § 54, или чрезъ *введеніе вспомогательнаго угла*. Какъ должно поступать для приведенія формулъ помощью тригонометрическихъ величинъ къ виду, удобному для логарифмическихъ вычисленій, увидимъ изъ приведенныхъ ниже примѣровъ.

Примѣръ I. Привести выраженіе: $\cos 46^\circ + \cos 30^\circ$ къ виду, удобному для логарифмическаго вычисления.

Въ § 54 имѣли:

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$$

Положивъ здѣсь: $a = 46^\circ$ и $b = 30^\circ$, найдемъ, что

$$\cos 46^\circ + \cos 30^\circ = 2 \cos 38^\circ \cos 8^\circ.$$

Примѣръ II. Привести выраженіе: $\sin x + \cos x$ къ виду, удобному для логарифмическаго вычисления.

Такъ какъ $\cos x = \sin(90^\circ - x)$, то (§ 54)

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \sin x + \sin(90^\circ - x) = \\ &= 2 \sin \frac{x + 90^\circ - x}{2} \cos \frac{x - 90^\circ + x}{2} = 2 \sin 45^\circ \cos(x - 45^\circ) \\ &= 2 \sqrt{\frac{1}{2}} \cos(x - 45^\circ) = \sqrt{2} \cos(x - 45^\circ). \end{aligned}$$

Примѣръ III. Привести алгебраическую сумму двухъ какихъ-либо чиселъ къ виду, удобному для ея логарифмическаго вычисления.

Пусть a и b два какихъ-либо числа; тогда

$$x = a + b = a \left(1 + \frac{b}{a} \right).$$

Положивъ $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$, найдемъ:

$$x = a(1 + \operatorname{tg} \varphi) = a \left(1 + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right) = \frac{a(\sin \varphi + \cos \varphi)}{\cos \varphi};$$

но (прим. II) $\sin \varphi + \cos \varphi = \sqrt{2} \cos(\varphi - 45^\circ)$, а потому

$$x = \frac{a\sqrt{2} \cos(\varphi - 45^\circ)}{\cos \varphi}.$$

Если же намъ извѣстно, какое изъ чиселъ a и b положительное или отрицательное, то приведеніе можно сдѣлать проще. Напримѣръ, если a и b будутъ числа положительныя, то

$$x = a + b = a \left(1 + \frac{b}{a} \right),$$

гдѣ положивъ $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}^2 \varphi$, найдемъ:

$$x = a(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = a \sec^2 \varphi = \frac{a}{\cos^2 \varphi}.$$

Если $r = a - b$, гдѣ a и b числа положительныя и $a > b$, то, положивъ $\frac{b}{a} = \cos^2 \varphi$, найдемъ:

$$x = a \left(1 - \frac{b}{a} \right) = a(1 - \cos^2 \varphi) = a \sin^2 \varphi$$

Примѣръ IV. Привести выраженіе: $a \cos x \pm b \sin x$ къ виду, удобному для логарифмическаго вычисления.

Имѣемъ:

$x = a \cos \alpha \pm b \sin \alpha = a \left(\cos \alpha \pm \frac{b}{a} \sin \alpha \right)$; положивъ $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$, найдемъ:

$$\begin{aligned} x &= a (\cos \alpha \pm \operatorname{tg} \varphi \sin \alpha) = a \left(\cos \alpha \pm \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin \alpha \right) \\ &= a \left(\frac{\cos \alpha \cos \varphi \pm \sin \alpha \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) = a \cos (\alpha \mp \varphi). \end{aligned}$$

Примѣръ V. Даны A , α и δ : определить φ изъ уравненія:
 $\sin A = \cos \varphi \cos \alpha \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta$. Имѣемъ:

$$\sin A = \sin \delta (\sin \varphi + \cos \varphi \cdot \cos \alpha \operatorname{ctg} \delta);$$

положивъ: $\operatorname{tg} \psi = \cos \alpha \operatorname{ctg} \delta$, . . . (1), найдемъ:

$$\sin A = \sin \delta \left(\sin \varphi + \cos \varphi \cdot \frac{\sin \psi}{\cos \psi} \right) = \sin \delta \frac{\sin (\varphi + \psi)}{\cos \psi}. \quad (2)$$

Изъ (1) уравненія опредѣлимъ ψ , а изъ (2) уравненія $\varphi + \psi$, а слѣдовательно и φ .

Примѣръ VI. Рѣшить уравненіе:

$$25 \sin \vartheta + 32 \cos \vartheta = 10.$$

Раздѣлимъ все члены уравненія на 25 и положимъ $\frac{32}{25} = \operatorname{tg} \varphi$; найдемъ:

$$\sin \vartheta + \operatorname{tg} \varphi \cos \vartheta = 0,4$$

или

$$\sin \vartheta + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos \vartheta = 0,4 \quad \text{или} \quad \frac{\sin (\vartheta + \varphi)}{\cos \varphi} = 0,4;$$

откуда,

$$\sin (\vartheta + \varphi) = 0,4 \cos \varphi.$$

Вычисленіе угла φ .

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{32}{25}$$

$$\lg 32 = 1,5051500$$

$$\lg 25 = 1,3979400$$

$$\lg \operatorname{tg} \varphi = 0,1072100$$

$$\varphi = 52^{\circ} 4'', 562$$

Вычисленіе угла ϑ .

$$\sin (\vartheta + \varphi) = 0,4 \cos \varphi$$

$$\lg 0,4 = 1,6020600$$

$$\lg \cos \varphi = 1,7843297$$

$$\lg \sin (\vartheta + \varphi) = 1,3913597$$

$$\vartheta + \varphi = 14^{\circ} 15' 22'', 218$$

$$\vartheta = - 37^{\circ} 44' 42'', 344.$$

Примѣръ VII. Привести формулу: $1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ изъ виду, удобному для логарифмическаго вычисленія.

Придадимъ и вычтемъ изъ данной формулы по $\cos^2 \beta \cos^2 \gamma$; найдемъ:

$$\begin{aligned} x &= 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + \\ &\quad + \cos^2 \beta \cos^2 \gamma - \cos^2 \beta \cos^2 \gamma = \\ &= 1 - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + \cos^2 \beta \cos^2 \gamma - (\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma)^2 \\ &= \sin^2 \beta - \cos^2 \gamma (1 - \cos^2 \beta) - (\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma)^2 \\ &= \sin^2 \beta - \cos^2 \gamma \sin^2 \beta - (\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma)^2 \\ &= \sin^2 \beta (1 - \cos^2 \gamma) - (\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma)^2 \\ &= \sin^2 \beta \sin^2 \gamma - (\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma)^2 \\ &= [\sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma][\sin \beta \sin \gamma - \cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma]. \\ &= [\cos \alpha - \cos(\beta + \gamma)][\cos(\beta - \gamma) - \cos \alpha]. \end{aligned}$$

Но разность косинусовъ можно представить въ видѣ произведенія (§ 54); поэтому

$$\begin{aligned} x &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha - \beta - \gamma}{2} = -2 \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \sin \frac{\beta - \gamma - \alpha}{2} \\ &= 4 \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \sin \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \sin \frac{\gamma - \beta - \alpha}{2}. \end{aligned}$$

Положивъ $\alpha + \beta + \gamma = 2\zeta$, найдемъ:

$$x = 4 \sin \zeta \sin(\zeta - \alpha) \sin(\zeta - \beta) \sin(\zeta - \gamma).$$

§ 111. Рѣшеніе уравненій второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ помощью тригонометрическихъ таблицъ. Корни квадратнаго уравненія

$$x^2 + px + q = 0. \dots (1)$$

суть:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \dots (2)$$

Предположимъ, что p и q будутъ члена действительными и разберемъ здѣсь три случая:

1) Число q положительное и $\frac{p^2}{4} - q > 0$

Тогда, взявъ во второй части (2) равенства $\frac{p}{2}$ за скобку множителемъ, получимъ:

$$x = \frac{p}{2} (-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}),$$

а такъ какъ, по условію, $\frac{p^2}{4} > q$ или $p^2 > 4q$, то дроби $\frac{4q}{p^2} < 1$, поэтому положимъ:

$$\frac{4q}{p^2} = \sin^2 \varphi; \text{ отку (а) } \sin \varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}.$$

Слѣдовательно

$$x = \frac{p}{2} (-1 \pm \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}) = \frac{p}{2} (-1 \pm \cos \varphi). \quad (3)$$

Изъ равенства $\sin \varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$, найдемъ: $p = \frac{2\sqrt{q}}{\sin \varphi}$ и, подставивши въ (3) равенство вмѣсто p его величину, получимъ:

$$x = \frac{\sqrt{q}}{\sin \varphi} (-1 \pm \cos \varphi) = -\sqrt{q} \cdot \frac{1 \mp \cos \varphi}{\sin \varphi},$$

откуда (§ 57)

$$x_1 = -\sqrt{q} \cdot \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = -\sqrt{q} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}, \quad x_2 = -\sqrt{q} \cdot \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} = -\sqrt{q} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

2) Число q положительное и $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

Въ этомъ случаѣ, изъ (2) равенства, получимъ:

$$x = \sqrt{q} \left(-\frac{p}{2\sqrt{q}} \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{1 - \frac{p^2}{4q}} \right);$$

положивъ $\frac{p^2}{4q} = \cos^2 \varphi$, найдемъ, что $\frac{p}{2\sqrt{q}} = \cos \varphi$ и

$$x = \sqrt{q} (-\cos \varphi \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varphi})$$

или

$$x = \sqrt{q} (-\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})$$

3) q отрицательное. Возьмемъ за скобку $\frac{p^2}{2}$ во второй части (2) равенства; получимъ:

$$x = \frac{p}{2} (-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}).$$

Положивъ $\frac{4q}{p^2} = \operatorname{tg}^2 \varphi$, найдемъ, что $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{-q}}{p}$ и

$$x = \frac{p}{2} (-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}) = \frac{p}{2} (-1 \pm \frac{1}{\cos \varphi}) = \frac{p}{2} \cdot \frac{-\cos \varphi \pm 1}{\cos \varphi};$$

изъ равенства же $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{-q}}{p}$, найдемъ: $p = \frac{2\sqrt{-q}}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{2\sqrt{-q} \cdot \cos \varphi}{\sin \varphi}$,

а потому

$$x = \sqrt{-q} \cdot \frac{-\cos \varphi \pm 1}{\sin \varphi};$$

откуда

$$x_1 = \sqrt{-q} \cdot \frac{-\cos \varphi + 1}{\sin \varphi} = \sqrt{-q} \cdot \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \sqrt{-q} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

$$\text{и} \quad x_2 = \sqrt{-q} \cdot \frac{-\cos \varphi - 1}{\sin \varphi} = -\sqrt{-q} \cdot \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} = -\sqrt{-q} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$$

Примѣръ. Рѣшить уравненіе:

$$x^3 + 0,56487x + 0,02564 = 0.$$

Здѣсь $p = 0,56487$, $q = 0,02564$ и $\frac{p^3}{4} = q > 0$, а потому здѣсь имѣеть мѣсто первый случай; положивъ $\sin \varphi = \frac{\sqrt[3]{q}}{p}$, найдемъ:

$$x_1 = -\sqrt[3]{q} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = -\sqrt[3]{q} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

Ходъ вычисленій.

$$\lg \sin \varphi - \lg 2 + \frac{\lg q}{2} - \lg p = 0,3010300 + 1,2044590 + 0,2480515 \\ = 1,7535405; \quad \varphi = 34^{\circ}32'14'',738$$

Вычисленіе корня x_1 .

$$\frac{\lg q}{2} = 1,2044590$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = 1,4925738$$

$$\lg (-x_1) = 2,6970328$$

$$-x_1 = 0,0497775$$

$$x_1 = -0,0497775.$$

Вычисленіе корня x_2 .

$$\frac{\lg q}{2} = 1,2044590$$

$$-\lg \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = 0,5074262$$

$$\lg (-x_2) = 1,7118852$$

$$-x_2 = 0,5150925$$

$$x_2 = -0,5150925.$$

ПОВѢРКА.

$$x_1 = -0,0497775$$

$$x_2 = -0,5150925$$

$$x_3 = -0,5648700$$

$$\lg (-x_1) = 2,6970328$$

$$\lg (-x_2) = 1,7118852$$

$$\lg (x_1 x_2) = 2,4089180$$

$$x_1 x_2 = 0,02564.$$

§ 112. Рѣшеніе уравненій третьей степени съ однимъ неизвѣстнымъ помощью тригонометрическихъ таблицъ. Уравненіе третьей степени съ однимъ неизвѣстнымъ можетъ быть приведено къ виду:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0;$$

раздѣливъ обѣ части уравненія на a , получимъ:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0,$$

а подставивъ въ немъ $y = \frac{b}{3a}$ вмѣсто x , придемъ къ уравненію:

$$y^3 + py + q = 0.$$

Слѣдов. полное уравненіе третьей степени можно привести къ виду:

$$x^3 + px + q = 0. \quad \dots \dots \dots (4)$$

Рѣшимъ это уравненіе, когда p и q будутъ действительныя числа. Въ § 66 видѣли, что уравненіе:

$$\cos^3 \frac{\varphi}{3} - \frac{3}{4} \cos \frac{\varphi}{3} - \frac{\cos \varphi}{4} = 0$$

или, положивъ $\cos \frac{\varphi}{3} = y$, уравненіе.

$$y^3 - \frac{3}{4}y - \frac{\cos \varphi}{4} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

имѣеть три корня:

$$y = \cos \frac{\varphi}{3}, \quad y = \cos \frac{2\pi + \varphi}{3} \quad \text{и} \quad y = \cos \frac{2\pi - \varphi}{3}; \quad (6)$$

поэтому, если будетъ возможно привести (4) уравненіе къ виду (5), то тогда легко найти корни (4) уравненія. Для приведенія (4) уравненія къ виду (5), положимъ въ (4) уравненіи $x = ny$; тогда найдемъ:

$$n^3y^3 + nry + q = 0 \quad \text{или} \quad y^3 + \frac{r}{n^2}y + \frac{q}{n^3} = 0;$$

чтобы это уравненіе было тождественно съ (4), необходимо опредѣлить n и φ такъ, чтобы

$$\frac{r}{n^2} = -\frac{3}{4} \quad \text{и} \quad \frac{q}{n^3} = -\frac{\cos \varphi}{4};$$

Изъ перваго равенства имѣемъ: $n = \sqrt[3]{-\frac{4r}{3}}$ и, взявъ для n положительное значеніе, найдемъ изъ втораго равенства, что

$$\cos \varphi = -\frac{q}{2} \cdot \sqrt[3]{-\frac{3}{r}}.$$

Величины для n и φ будутъ очевидно возможны только при r отрицательномъ и при условіи, чтобы

$$-\frac{q}{2} < \sqrt[3]{\left(-\frac{r}{3}\right)^3} \quad \text{или} \quad -\frac{q}{2} = \sqrt[3]{\left(-\frac{r}{3}\right)^3}, \quad . \quad . \quad (7)$$

потому что $\cos \alpha = 1$ или, въ частномъ случаѣ, равенъ 1.

Упростимъ (7) выраженія: для этого, въ каждомъ изъ этихъ выраженій, возведемъ обѣ части въ квадратъ и перенесемъ члены въ первую часть; найдемъ:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{r^3}{27} < 0 \quad \text{или} \quad \frac{q^2}{4} + \frac{r^3}{27} = 0 \quad . \quad . \quad (8)$$

отсюда видимъ, что для существованія этихъ условій, необходимо, чтобы r было отрицательнымъ, потому что въ противномъ случаѣ величины первыхъ частей были бы положительными, следовательно, условіе: $r < 0$ входитъ въ предыдущія условія. И такъ, чтобы возможно было сдѣлать указанія преобразованія, другими словами, чтобы корни (4) уравненія были действительные, необходимо имѣть или

$$\frac{q^2}{4} + \frac{r^3}{27} < 0 \quad \text{или} \quad \frac{q^2}{4} + \frac{r^3}{27} = 0.$$

Мы положили $x = ny$; следовательно изъ (6) равенствъ получимъ:

$$x_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{r}{3}} \cos \frac{\varphi}{3}, \quad x_2 = 2\sqrt[3]{-\frac{r}{3}} \cos \frac{2\pi + \varphi}{3} \quad \text{и} \quad x_3 = 2\sqrt[3]{-\frac{r}{3}} \cos \frac{2\pi - \varphi}{3},$$

гдѣ φ опредѣлится изъ равенства:

$$\cos \varphi = -\frac{q}{2} \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

При условии $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, $\cos \varphi = 1$ и $\varphi = 0$: тогда

$$x_1 - 2 \sqrt[3]{-\frac{p}{3}}, \quad x_2 - 2 \sqrt[3]{\frac{p}{3} \cdot \cos \frac{2\pi}{3}} \quad \text{и} \quad x_3 - 2 \sqrt[3]{-\frac{p}{3} \cdot \cos \frac{2\pi}{3}}$$

откуда видно, что, при этихъ услови, кубическое уравненіе: $x^3 + px + q = 0$ имѣетъ два равныхъ корня.

Численный примѣръ. Решить уравненіе $x^3 - 6x - 2 = 0$.

$$\text{Здѣсь } \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{(-2)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27} = 1 - 8 = -7 < 0,$$

слѣдовательно корни этого уравненія действительные и равны

$$x_1 = \sqrt[3]{8} \cos \frac{\varphi}{3}, \quad x_2 = \sqrt[3]{8} \cdot \cos \left(120^\circ + \frac{\varphi}{3}\right) = -\sqrt[3]{8} \sin \left(30^\circ + \frac{\varphi}{3}\right)$$

$$\text{и } x_3 = \sqrt[3]{8} \cos \left(120^\circ - \frac{\varphi}{3}\right) = \sqrt[3]{8} \sin \left(30^\circ - \frac{\varphi}{3}\right), \quad \text{гдѣ } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt[3]{8}}.$$

Вычисленіе угла φ .

$$\lg \cos \varphi = -\frac{\lg 8}{2}$$

или $\lg \cos \varphi = \bar{1},5484550$
 $\varphi = 69^\circ 17' 42'' ,675$
 $\frac{\varphi}{3} = 23^\circ 5' 54'' ,225$

Вычисленіе x_1 .

$$\frac{\lg 8}{2} = 0,4515450$$

$$\lg \sin \left(30^\circ + \frac{\varphi}{3}\right) = 1,9029097$$

$$\lg(-x_2) = 0,3544547$$

$$x_2 = -2,261803.$$

Вычисленіе x_2 .

$$\frac{\lg 8}{2} = 0,4515450$$

$$\lg \cos \frac{\varphi}{3} = 1,9637087$$

$$\lg x_1 = 0,4152537$$

$$x_1 = 2,601679$$

Вычисленіе x_3 .

$$\frac{\lg 8}{2} = 0,4510450$$

$$\lg \sin \left(30^\circ - \frac{\varphi}{3}\right) = 1,0797767$$

$$\lg(-x_3) = \bar{1},5313217$$

$$x_3 = -0,339877.$$

§ 113. Разсмотримъ случай, когда уравненіе (4) имѣетъ мнимые корни. Корни (4) уравненія, какъ извѣстно изъ алгебры, будутъ

$$x_1 = m + n, \quad x_2 = \alpha m + \beta n \quad \text{и} \quad x_3 = \beta m + \alpha n, \dots \dots \dots (9)$$

гдѣ

$$m = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad n = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Условіе, чтобы (4) уравненіе имѣло мнимые корни, есть слѣдующее:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0 \dots \dots \dots (10)$$

1-й случай. p отрицательное число. Из условия (10) имеем. $\frac{q^2}{4} > \frac{p^2}{27}$
 а потому можно положить, что

$$-\frac{p^2}{27} = q^2 \sin^2 \omega \text{ или } \sqrt{-\frac{p^2}{27}} = \frac{q}{2} \sin \omega; \dots (11)$$

тогда

$$m = \sqrt{-\frac{q}{2} + \frac{q}{2} \cos \omega} = \sqrt{-\frac{q}{2}(1 - \cos \omega)} = \sqrt{-q \sin^2 \frac{\omega}{2}}$$

$$\text{и } n = \sqrt{-\frac{q}{2} - \frac{q}{2} \cos \omega} = \sqrt{-\frac{q}{2}(1 + \cos \omega)} = \sqrt{-q \cos^2 \frac{\omega}{2}};$$

Из (11) равенства: $q = \frac{2}{\sin \omega} \sqrt{-\frac{p^2}{27}}$; следовательно

$$m = \sqrt{-\frac{2}{\sin \omega} \cdot \sqrt{-\frac{p^2}{27}} \cdot \sin^2 \frac{\omega}{2}} = \sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}$$

$$\text{и } n = \sqrt{-\frac{2}{\sin \omega} \cdot \sqrt{-\frac{p^2}{27}} \cdot \cos^2 \frac{\omega}{2}} = \sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2}};$$

если положим: $\sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}} = \operatorname{tg} \varphi$, то найдем из (9) равенств:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{p}{3} (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{ctg} \varphi)} = \sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \frac{2}{\sin 2 \varphi},$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{-\frac{p}{3} (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{ctg} \varphi) \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-p} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{ctg} \varphi)}$$

$$= -\frac{1}{\sin 2 \varphi} \sqrt{-\frac{p}{3} \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-p} \cdot \operatorname{ctg} 2 \varphi}$$

Следовательно, для определения корней уравнения, ищем сперва ω из равенства: $\sin \omega = \frac{2}{q} \sqrt{-\frac{p^2}{27}}$; потом φ из уравнения: $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}$ и наконец уже x_1 , x_2 и x_3 по формулам:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \frac{2}{\sin 2 \varphi}$$

$$\text{и } x_2 = -\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \frac{1}{\sin 2 \varphi} \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-p} \operatorname{ctg} 2 \varphi$$

Численный примеръ. Решить уравнение $x^3 - x + 4 = 0$.

Вычисленіе угла ω .

$$\sin \omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{27}} = \frac{1}{21,27}$$

$$\lg 2 = 0,3010300$$

$$\lg \frac{27}{2} = 0,7156819$$

$$\lg \sin \omega = 2,9832681$$

$$\omega = 5^{\circ}31'17'',596$$

$$\frac{\omega}{3} = 2^{\circ}45'39'',298$$

Вычисленіе $\sqrt{-p \operatorname{ctg} 2\varphi} =$

$$= \operatorname{ctg} 40^{\circ}7'',054$$

$$\lg \operatorname{ctg} 40^{\circ}7'',054 = 0,0761563$$

$$\operatorname{ctg} 40^{\circ}7'',054 = 1,1916709$$

Вычисленіе угла φ .

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\operatorname{tg} 2^{\circ}45'39'',298}$$

$$\lg \operatorname{tg} 2^{\circ}45'39'',298 = \frac{2,6832669}{3}$$

$$\lg \operatorname{tg} \varphi = \bar{1},5610890$$

$$\varphi = 20^{\circ}3',527.$$

$$2\varphi = 40^{\circ}7'',054$$

Вычисленіе x_1 .

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sin 40^{\circ}7'',054}}$$

$$\lg 2 = 0,3010300$$

$$-\frac{\lg 3}{2} = \bar{1},7614393$$

$$\lg \sin 40^{\circ}7'',054 = 0,1919148$$

$$\lg x_1 = 0,2543841$$

$$x_1 = 1,7963216$$

$$x_3 = 0,8981608 \pm 1,1916709 \sqrt{-1}.$$

2-ой случай. Число p положительное. Положимъ:

$$\frac{p^3}{27} - \frac{q^3}{4} \operatorname{tg}^2 \omega \quad \text{или} \quad \sqrt{\frac{p^3}{27} - \frac{q}{2} \operatorname{tg} \omega}; \quad (12)$$

тогда

$$m = \sqrt{\frac{q \sin^2 \frac{\omega}{2}}{\cos \omega}} \quad \text{и} \quad n = \sqrt{\frac{q \cos^2 \frac{\omega}{2}}{\cos \omega}}.$$

Изъ (12) равенства $q = 2 \operatorname{ctg} \omega \sqrt{\frac{p^3}{27}}$, а потому

$$m = \sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}} \quad \text{и} \quad n = -\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \sqrt{\operatorname{ctg} \frac{\omega}{2}}.$$

Положивши: $\sqrt{\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}} = \operatorname{tg} \varphi$, найдемъ:

$$m = \sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{tg} \varphi \quad \text{и} \quad n = -\sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{ctg} \varphi;$$

следовательно искомые корни будутъ:

$$x = 2 \sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{ctg} 2\varphi \quad \text{и} \quad x = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{ctg} 2\varphi \pm \sqrt{-p} \cdot \frac{1}{\sin 2\varphi}.$$

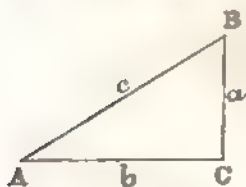
ОТДѢЛЪ VIII.

Отношенія между сторонами и тригонометрическими величинами угловъ
треугольника.

§ 114. Условимся означать углы треугольника ABC буквами A, B, C , а длины сторонъ, противолежащихъ этимъ угламъ, соответственно, буквами a, b и c . Здѣсь a, b и c будутъ числа, показывающія сколько разъ единица мѣры содержится въ соответствующихъ сторонахъ, а потому всѣ стороны должны быть выражены посредствомъ одной единицы мѣры.

§ 115. Теорема. Въ прямоугольномъ треугольникѣ катетъ равенъ гипотенузѣ, умноженной на синусъ угла, противолежащаго этому катету, или на косинусъ угла, прилежащаго къ нему.

Фиг. 32.



Пусть въ треугольникѣ ABC уголъ C будетъ прямой; тогда (§ 16)

$$\frac{BC}{AB} = \sin A \quad \text{или} \quad \frac{a}{c} = \sin A;$$

откуда

$$a = c \sin A \quad \dots \dots \dots (1).$$

Углы же A и B взаимно-дополнительные до прямого, а потому (§ 38) $\sin A = \cos B$ и слѣдовательно

$$a = c \cos B \quad \dots \dots \dots (2)$$

§ 116. Теорема. Въ прямоугольномъ треугольникѣ катетъ равенъ другому катету, умноженному на тангенсъ угла, противолежащаго первому катету, или на котангенсъ угла, прилежащаго къ нему.

На основаніи опредѣленій (§ 16):

$$\frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} A \quad \text{или} \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg} A;$$

откуда

$$a = b \operatorname{tg} A \quad \dots \dots \dots (3)$$

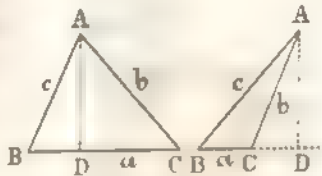
Но $A = 90^\circ - B$ и потому (§ 36) $\operatorname{tg} A = \operatorname{ctg} B$; слѣдовательно

$$a = b \operatorname{ctg} B \dots \dots \dots (4)$$

§ 117. Теорема. Во всякомъ треугольникѣ стороны пропорциональны синусамъ противолежащихъ имъ угловъ.

Въ треугольникѣ ABC опустимъ изъ вершины A перпендикуляръ AD на сторону BC (чер. 33) или продолженіе стороны BC (чер. 34).

Фиг. 33. Фиг. 34.



Если углы B и C острые, какъ въ 33 чертежѣ, то изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ABD и ACD найдемъ (§ 115):

$$AD = c \sin B \text{ и } AD = b \sin C$$

откуда

$$c \sin B = b \sin C$$

или

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \dots \dots \dots (5)$$

Если же одинъ изъ угловъ B или C тупой, какъ въ 34 чертежѣ, то, изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ABD и ACD , получимъ:

$$AD = c \sin B \text{ и } AD = b \sin ACD;$$

но (§ 40) $\sin ACD = \sin(180^\circ - C) = \sin C$; слѣдовательно $AD = b \sin C$

и потому $c \sin B = b \sin C$; откуда $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$.

Если же уголъ C прямой, какъ въ 32 чертежѣ, то

$$b = c \sin B$$

и слѣдовательно

$$c = \frac{b}{\sin B}, \text{ или } \frac{c}{1} = \frac{b}{\sin B} \text{ или } \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}.$$

Точно также найдемъ:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \dots \dots \dots (6)$$

Соединивъ вмѣстѣ (5) и (6) равенства, получимъ:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

§ 118. Теорема. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих же сторон на косинус угла, заключенного между ними.

Если в треугольнике ABC угол C острый (чер. 33), то

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 BC \cdot CD$$

или

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 a \cdot CD;$$

но, в прямоугольном треугольнике ACD (§ 115), имеем: $CD = b \cos C$, а потому

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 ab \cos C.$$

Если треугольн. ABC тупоугольный (чер. 34) и угол $C > 90^\circ$, то

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2 BC \cdot CD$$

или

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2 a \cdot CD.$$

Из прямоугольного же треугольника ABD имеем: $CD = b \cos ACD = b \cos (180^\circ - C)$; но (§ 40) $\cos (180^\circ - C) = -\cos C$ и потому $CD = -b \cos C$, а

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 ab \cos C.$$

Из этого равенства

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 ab}.$$

Точно также

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 bc} \text{ и } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 ac}.$$

Если же угол C прямой, то $\cos C = 0$ и $c^2 = a^2 + b^2$.

§ 119. Теорема. Сумма двух сторон треугольника относится к третьей как синус угла, лежащего между ними, к синусу противолежащего угла.

В § 117 нашли, что

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B};$$

придавъ къ обѣимъ частямъ равенства по 1, получимъ:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{\sin A}{\sin B} + 1 \quad \text{или} \quad \frac{a+b}{b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin B}.$$

Вычтя-же по 1 отъ обѣихъ частей того же равенства, найдемъ:

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{\sin A}{\sin B} - 1 \quad \text{или} \quad \frac{a-b}{b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin B}.$$

Раздѣливъ почленно одно полученное равенство на другое и принявъ во вниманіе формулу § 54, найдемъ:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} \quad \text{или} \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}.$$

§ 120. Мы нашли въ § 118, что

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Также извѣстно (§ 57), что $2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A$; слѣдовательно

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}.$$

Положивъ $a+b+c = 2p$ и вычтя изъ обѣихъ частей этого равенства сначала по $2c$, а потомъ по $2b$, найдемъ:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 2p & a+b+c &= 2p \\ -2c & & -2c & \\ \hline a+b-c &= 2(p-c) & a-b+c &= 2(p-b), \end{aligned}$$

слѣдовательно

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2(p-c)2(p-b)}{2bc};$$

откуда

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc} \quad \text{или} \quad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

т. е. во всякомъ треугольникѣ синусъ половины одного изъ его угловъ равенъ квадратному корню изъ дроби, у которой числитель есть произведение разностей между полупериметромъ треугольника и каждою изъ сторонъ, содержащихъ этотъ уголъ, а знаменатель — произведение тѣхъ же сторонъ. На основаніи сказаннаго имѣемъ:

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \quad \text{и} \quad \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.$$

Также

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 \frac{A}{2} &= 1 + \cos A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \\ &= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}. \end{aligned}$$

Положивъ $a+b+c=2p$ и вычтя изъ обѣихъ частей равенства по $2a$, найдемъ $b+c-a=2(p-a)$; слѣдовательно

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{2p \cdot 2(p-a)}{2bc} \quad \text{или} \quad \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc};$$

откуда

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

т. е. во всякомъ треугольникѣ косинусъ половины одного изъ его угловъ равенъ квадратному корню изъ дроби, у которой числитель есть произведение полупериметра на разность между полупериметромъ и стороною, противолежащую этому углу, а знаменатель — произведение сторонъ, содержащихъ этотъ уголъ. На основаніи сказаннаго

$$\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \quad \text{и} \quad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}.$$

Также $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sin \frac{A}{2} : \cos \frac{A}{2}$ и поэтому

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

т. е. во всякомъ треугольникѣ тангенсъ половины одного изъ его угловъ равенъ квадратному корню изъ дроби, у которой числитель есть произведение разностей полупериметра и сторонъ, содержащихъ этотъ

угла, а знаменатель — произведение полупериметра на разность между полупериметромъ и стороною, противолежащею этому углу.

Поэтому

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Какъ для синуса, такъ равно и для косинуса и тангенса, надо взять при корнѣ знакъ +, потому что углы $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$ и $\frac{1}{2}C$ меньше прямиаго, а въ этомъ случаѣ \sin , \cos и tang положительныя.

§ 121. Найденныя формулы для синуса, косинуса и тангенса половины угловъ треугольника возможны, если сумма двухъ сторонъ треугольника болѣе третьей. Напр. формула

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

можетъ дать для A вещественную величину только въ томъ случаѣ, когда подкоренная величина положительная и меньше единицы. Дѣйствительно, если подъ корнемъ величина положительная, то

$$p-a > 0, \quad \text{или} \quad \frac{a+b+c}{2} - a > 0 \quad \text{или} \quad b+c > a.$$

Если-же сумма двухъ сторонъ треугольника болѣе третьей, то одна изъ сторонъ болѣе разности двухъ другихъ его сторонъ и потому $a > b-c$; въ такомъ случаѣ числитель $p(p-a) = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4} < \frac{(b+c)^2 - (b-c)^2}{4}$ (потому что $a > b-c$); но $(b+c)^2 - (b-c)^2 = 4bc$ и слѣдовательно $p(p-a) < bc$, т. е. подъ корнемъ числитель меньше знаменателя, а потому и дробь меньше единицы.

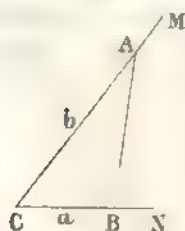
ОТДѢЛЪ IX.

Графическіе способы рѣшенія треугольниковъ — Хордовой масштабъ и масштабъ тангенсовъ. — Примеры на числовыя рѣшенія треугольниковъ.

§ 122. **Общая понятія.** Рѣшить треугольникъ, значитъ опредѣлить величины неизвѣстныхъ частей треугольника, когда имѣемъ достаточное число данныхъ. Въ числѣ данныхъ, необходимо имѣть одну изъ сторонъ треугольника, или прямую, находящуюся въ известной зависимости отъ сторонъ треугольника, какъ напр.: высоту треугольника, или радиусъ описаннаго круга около треугольника и т. п.; если же будутъ даны только углы, то треугольниковъ, при этихъ данныхъ, будетъ безчисленное множество (подобные треугольники) и слѣдовательно длины исконыхъ сторонъ будутъ произвольны.

§ 123. Рѣшить треугольникъ можно и съ помощью приемовъ, указанныхъ въ геометріи; но, такъ какъ откладываніе данныхъ величинъ, а также измѣреніе прямыхъ и угловъ, помощію масштаба и транспортира, произвести точно нельзя, то получимъ ошибки, кото-

Фиг. 35.



ры не могутъ быть сдѣланы произвольно малыми. Объяснимъ это примѣромъ.

Примѣръ. Рѣшить треугольникъ по двумъ сторонамъ: $a = 1265.3$ саж. и $b = 2480$ саж. и углу между ними $C' = 58^{\circ} 48' 36''.4$.

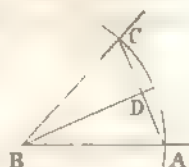
Для рѣшенія задачи, надо взять уголь $MC'N$, равный $58^{\circ} 48' 36''.4$; но такой уголь отложить точно нельзя, потому что на лучшихъ транспортахъ не имѣется секундъ, а тѣмъ болѣе долей секундъ; слѣдовательно, уголь $MC'N$ придется отложить неточно. Потомъ на сторонахъ $C'N$ и $C'M$ надо отложить, по масштабу, отъ вершины угла C' , части: $C'A = b$ и $C'B = a$ и точки B и A соединить прямою; здѣсь опять будетъ неточность въ отложеніи, потому что,

принимъ въ масштабѣ линію или $1''$ дюйма за 10 сажень. придется отложить $CB = 12,653$ дюйма или 12 дюймовъ 6,53 линии. а $CA = 24,8$ дюйма, сомы же доли линіи нельзя отложить точно, а потому 0,53 линіи будутъ отложены невьрно. Также замѣтимъ, что, сдѣлавъ при черченіи погрѣшность, напр. на 0,01 линіи, сдѣлаемъ въ дѣйствительности погрѣшность, равную 0,01 10 саж или 0,1 саж. После построения треугольника ABC , придется измѣрить сторону AB и прилежаще къ ней углы: здѣсь опять таки будутъ ошибки, которыя нельзя сдѣлать произвольно малыми. <

§ 124. Таблицы хордъ и тангенсовъ. Измѣрене угловъ, а также и черченіе ихъ, можно сдѣлать еще помощью *таблицы хордъ* и *таблицы тангенсовъ*.

1) *Таблица хордъ*. Пусть ABC будетъ данный уголъ. Изъ точки B опишемъ дугу, которая пересѣчетъ стороны угла въ точкахъ A и C , проведемъ хорду AC и изъ точки B опустимъ перпендикуляръ BD на AC ; означимъ радиусъ боквою r и хорду AC буквою k . Изъ прямоугольнаго треугольника ABD имѣемъ (§ 115). $AD = AB \sin ABD$ или $\frac{k}{2} = r \sin \frac{B}{2}$. от-

Фиг. 36.



куда $k = 2r \sin \frac{1}{2} B$. Зная r и уголъ B , можемъ по логарифмамъ определять величину k ; но, чтобы не производить вычисленій для каждаго угла особю, составлена таблица хордъ для $r = 1000$ и угловъ отъ $5'$ до $5'$ въ промежуткѣ отъ $0''$ до $90''$ (см. I таблицу въ концѣ кн. II). Радиусъ обыкновенно принимаютъ равнымъ 10 полудюймамъ и дѣлятъ его поперечнаемъ поперечнаго масштаба на 1000 равныхъ частей.

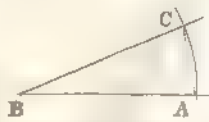
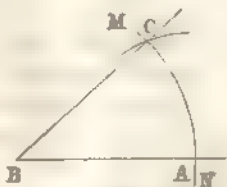
Употребленіе таблицы хордъ. Пусть требуется начертить уголъ, равный $42^\circ 45'$. Изъ произвольной точки B (фиг. 37) опишемъ дугу MN радиусомъ, равнымъ 10 полудюймамъ и отыщемъ, въ таблицѣ хордъ, хорду, соответствующую $42^\circ 45'$; находимъ 729. Поэтому, взявъ по масштабу длину, соответствующую 729 дѣлеиамъ, опишемъ дугу втѣмъ радиусомъ изъ какой либо точки A дуги MN , кот.

Фиг. 37.

Фиг. 38

пересѣчетъ дугу MN въ точкѣ C ; получимъ искомый уголъ ABC . Теперь положимъ надо измѣрить уголъ ABC (фиг. 38). Для этого опишемъ изъ точки B дугу радиусомъ, равнымъ 10 полудюймамъ, кот. пересѣчетъ бока угла въ точкахъ A и C , потомъ опредѣлимъ по масштабу длину хорды AC и посмотримъ въ таблицахъ хордъ соответствующее ей число градусовъ и минутъ. Напр., если длина хорды 396, то соотв. уголъ будетъ $22^\circ 50'$.

Если уголъ тупой, то надо построить или измѣрить сначала дополнительный данному.



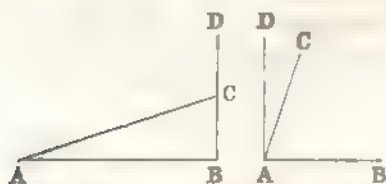
2) *Таблица тангенсов.* Такъ какъ для каждаго угла можемъ опредѣлить величину тангенса, то поэтому составляють таблицу тангенсовъ для угловъ, напр. отъ $5'$ до $5'$, въ промежуткѣ отъ 0° до 45° , выражая ихъ въ тысячныхъ доляхъ (см. II таблицу въ концѣ книги).

Если примемъ (§ 16) одинъ изъ катетовъ прямоугольнаго треугольника за постоянную величину и раздѣлимъ его на 1000 равныхъ частей, то другой катетъ выразится въ частяхъ перваго катета, такъ, для угла въ $23^\circ 15'$, противоположный ему катетъ будетъ содержать 430 частей, потому что $\lg \operatorname{tg} 23^\circ 15' = 1,6330985$, а $\operatorname{tg} 23^\circ 15' = 0,43 = \frac{430}{1000}$, гдѣ катетъ прилежащій къ углу, равенъ 1000, а катетъ, противоположный углу, равенъ 430; катетъ прилежащій къ углу принимаемъ равнымъ 10 полудюймамъ и дѣлять его, построениемъ поперечнаго масштаба, на 1000 равныхъ частей. Но такъ какъ въ таблицѣ помѣщены тангенсы угловъ отъ 0° до 45° , то, при построении и измѣреніи угловъ, можетъ быть три случая:

1) Уголъ менѣе 45° , напр., $18^\circ 40'$: тогда смотримъ въ таблицѣ соответствующее число $18^\circ 40'$ и находимъ 338 ; беремъ по масштабу, длину равную

Фиг. 39.

Фиг. 40.

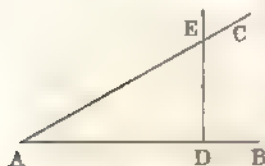


338 частямъ и въ произвольной прямой откладываемъ часть AB (фиг. 39), равную 10 полудюймамъ и, возставивъ перпендикуляръ BD къ AB , отложимъ на немъ часть BC , равную 338 частямъ; точку C соединимъ съ A и получимъ уголъ BAC , равный $18^\circ 40'$.

2) Уголъ менѣе 90° и болѣе 45° , напр. $72^\circ 35'$. Изъ точки A (фиг. 40) возставимъ перпендикуляръ AD къ AB и построимъ уголъ DAC , равный дополненію до 90° углу $72^\circ 35'$, т. е. $17^\circ 25'$. Уголъ BAC будетъ искомымъ.

3) Если уголъ тупой, то сначала строимъ уголъ, дополнительный данному до двухъ прямыхъ, а за гѣмъ и самый уголъ.

Фиг. 41.



Теперь положимъ надо измѣрить данный уголъ BAC . Тогда на линіи AB отложимъ часть AD , равную 10 полудюймамъ, и изъ точки D возставимъ перпендикуляръ къ AB до встрѣчи съ AC въ точкѣ E и, измѣривъ по масштабу длину катета DE , смотримъ по таблицѣ тангенсовъ уголъ, соответствующій длинѣ DE . Этотъ уголъ и будетъ искомымъ.

Замѣчаніе. Можно подобнымъ образомъ составить таблицы для остальныхъ тригонометрическихъ величинъ.

РѢШЕНІЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХЪ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ.

§ 125. **Примѣръ I.** *Рѣшить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ и острому углу.*

Дана гипотенуза c и острый уголъ A ; опредѣлить катеты a и b и острый уголъ B . Имѣемъ (§ 115):

$$a = c \sin A \text{ и } b = c \cos A,$$

откуда, по логарифмамъ, легко опредѣлять b и c ; кромѣ того

$$B = 90^\circ - A.$$

Численный примѣръ. $c = 8,96$ саж. и $A = 57^\circ 42' 36''$.

Вычисленіе катета a

$$\lg a = \lg c + \lg \sin A$$

$$\lg c = 0,9523080$$

$$\lg \sin A = 1,9270392$$

$$\lg a = 0,8793472$$

$$a = 7,574382 \text{ саж.}$$

Вычисленіе катета b .

$$\lg b = \lg c + \lg \cos A$$

$$\lg c = 0,9523080$$

$$\lg \cos A = 1,7277078$$

$$\lg b = 0,6800158$$

$$b = 4,786475 \text{ саж.}$$

$$B = 90^\circ - 57^\circ 42' 36'' = 32^\circ 17' 24''.$$

§ 126. *Примѣръ 2.* *Рѣшить прямоугольный треугольникъ по гипотенузы и катету.*

Дана гипотенуза c и катетъ a ; опредѣлить катетъ b и острые углы A и B . По Пифагоровой теоремѣ имѣемъ:

$$b^2 = c^2 - a^2; \text{ откуда } b = \sqrt{(c+a)(c-a)};$$

также

$$a = c \sin A \text{ или } a = c \cos B; \text{ откуда } \sin A = \frac{a}{c} \text{ или } \cos B = \frac{a}{c}.$$

Опредѣливъ-же A , найдемъ уголъ B по формулѣ: $B = 90^\circ - A$.

Численный примѣръ. $c = 60,8$ фута и $a = 57,674$ фута.

Вычисленіе катета b

$$\lg b = \frac{\lg(c+a) + \lg(c-a)}{2}$$

$$\lg(c+a) = 2,0736230$$

$$\lg(c-a) = 0,4949890$$

$$\lg b = \frac{2,5686120}{2}$$

$$\lg b = 1,2843060$$

$$b = 19,24447 \text{ фут.}$$

Вычисленіе угла A .

$$\lg \sin A = \lg a - \lg c$$

$$\lg a = 1,7609801$$

$$\lg c = 1,7839036$$

$$\lg \sin A = \bar{1},9770765$$

$$A = 71^\circ 32' 50'', 43.$$

$$B = 90^\circ - A = 18^\circ 27' 9'', 57.$$

§ 127. Если гипотенуза c мало разнится от катета a , то угол B будет весьма малъ, а уголъ A близокъ къ 90° . Въ этомъ случаѣ углы A и B надо опредѣлить или помощью способовъ, указанныхъ въ § 104—108, или помощью слѣд. формулы: знаемъ, что

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sin \frac{B}{2} : \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos B}{1 + \cos B}}$$

по $\cos B = \frac{a}{c}$, а потому, подставимъ его величину въ предыдущее выраженіе, найдемъ:

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{c-a}{c+a}}$$

Примѣръ. $c = 12$ и $a = 11,96$.

Вычисленіе катета b .

$$\lg b = \frac{\lg(c-a) + \lg(c+a)}{2}$$

$$\lg(c-a) = \overline{2},6020600$$

$$\lg(c+a) = 1,3794868$$

$$\lg b = \frac{1,9815468}{2}$$

$$\lg b = \overline{1},9907734$$

$$b = 0,9789791$$

Вычисленіе угла B .

$$\lg \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{\lg(c-a) - \lg(c+a)}{2}$$

$$\lg(c-a) = \overline{2},6020600$$

$$\lg(c+a) = 1,3794868$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{3,2225732}{2}$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \overline{2},6112868$$

$$\frac{B}{2} = 2^\circ 20' 21'',11$$

$$B = 4^\circ 40' 42'',22.$$

§ 128. *Примѣръ 3.* Решить прямоугольный треугольникъ по катету a и острому углу.

1) Данъ катетъ a и уголъ A ; опредѣлить уголъ B , катетъ b и гипотенузу c .

Въ § 115 нашли

$$a = c \sin A; \text{ откуда } c = \frac{a}{\sin A}$$

$$\text{и (§ 116)} \quad a = b \operatorname{tg} A; \text{ откуда } b = \frac{a}{\operatorname{tg} A};$$

кромя того $B = 90^\circ - A$.

2) Данъ катетъ a и уголъ B ; опредѣлить уголъ A , катетъ b и гипотенузу c .

Имѣемъ (§ 115):

$$a = c \cos B; \text{ откуда } c = \frac{a}{\cos B}$$

и (§ 116) $a = b \operatorname{ctg} B; \text{ откуда } b = \frac{a}{\operatorname{ctg} B}$

Угль-же $A = 90^\circ - B$.

Численный примѣръ. $a = 0,47368$ фута и $A = 16^\circ 42'' ,54$.

Вычисленіе гипотенузы c .

$$\lg c = \lg a - \lg \sin A$$

$$\lg a = 1,6754850$$

$$\lg \sin A = 1,4406503$$

$$\lg c = 0,2348347$$

$$c = 1,717255 \text{ фута}$$

Вычисленіе катета b .

$$\lg b = \lg a - \lg \operatorname{tg} A$$

$$\lg a = 1,6754850$$

$$\lg \operatorname{tg} A = 1,4578344$$

$$\lg b = 0,2176506$$

$$b = 1,650633 \text{ фута.}$$

$$B = 90^\circ - A = 73^\circ 59' 17'',46.$$

§ 129. Примѣръ 4. Рѣшить прямоугольный треугольникъ по катетамъ.

Даны катеты a и b ; опредѣлить гипотенузу c и углы A и B .
По § 116

$$a = b \operatorname{tg} A; \text{ откуда } \operatorname{tg} A = \frac{a}{b}.$$

Опредѣливъ-же угль A , найдемъ угль B по формулѣ:

$$B = 90^\circ - A, \text{ а гипотенузу } c \text{ по формулѣ: } c = \frac{a}{\sin A}.$$

Если a и b небольшія числа, то, для опредѣленія c , можно пользоваться формулою: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; если же a и b будутъ числа большія, то надо формулу: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ сдѣлать удобною для логарифмированія. Для этого возьмемъ подъ корнемъ b^2 за скобку.

$$c = \sqrt{b^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)} = b \sqrt{1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2}$$

и положимъ: $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \varphi$; найдемъ $c = b \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = b \operatorname{sec} \varphi = \frac{b}{\cos \varphi}$.

Численный примеръ. $a = 1,24078$ и $b = 0,96846$.

Вычисленіе угла A .

$$\lg \operatorname{tg} A = \lg a - \lg b$$

$$\lg a = 0,0936948$$

$$\lg b = 1,9860817$$

$$\lg \operatorname{tg} A = 0,1076131$$

$$A = 52^\circ 1' 37'',44$$

Вычисленіе гипотенузы c .

$$\lg c = \lg a - \lg \sin A$$

$$\lg a = 0,0936948$$

$$\lg \sin A = 1,8966924$$

$$\lg c = 0,1970024$$

$$c = 1,573992$$

$$B = 37^\circ 58' 22'',56.$$

Вычисленіе гипотенузы c помощью катетовъ a и b .

Вычисленіе вспом. угла φ .

$$\lg a = 0,0936948$$

$$\lg b = 1,9860817$$

$$\lg \operatorname{tg} \varphi = 0,1076131$$

$$\varphi = 52^\circ 1' 37'',44$$

Вычисленіе гипотенузы c .

$$\lg b = 1,9860817$$

$$\lg \cos \varphi = 1,7890792$$

$$\lg c = 0,1970025$$

$$c = 1,573992.$$

РѢШЕНІЕ КОСУГОЛЬНИКОВЪ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ.

§ 130. Примеръ 1. Решить треугольникъ по сторонамъ и двумъ угламъ.

Дана сторона a и углы B и C ; опредѣлить уголъ A и стороны b и c . Очевидно

$$A = 180^\circ - (B + C).$$

Также (§ 117)

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \quad \text{и} \quad \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}; \quad \text{откуда} \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A} \quad \text{и} \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Если даны a , A и B ; то C опредѣлимъ по формулѣ:

$C = 180^\circ - (A + B)$, а стороны b и c по тѣмъ-же формуламъ.

Численный примеръ. $a = 24,6876$ саж., $B = 40^\circ 45'$ и $C = 68^\circ 37' 0'',8$. Имѣемъ:

$$A = 180^\circ - (B + C) = 70^\circ 37' 59'',2.$$

Вычисленіе стороны b .

$$\lg b = \lg a + \lg \sin B - \lg \sin A$$

$$\lg a = 1,3924789$$

$$\lg \sin B = 1,8147534$$

$$- \lg \sin A = 0,0252975$$

$$\lg b = 1,2325298$$

$$b = 17,08165 \text{ саж.}$$

Вычисленіе стороны c .

$$\lg c = \lg a + \lg \sin C - \lg \sin A$$

$$\lg a = 1,3924789$$

$$\lg \sin C = 1,9690259$$

$$- \lg \sin A = 0,0252975$$

$$\lg c = 1,3868023$$

$$c = 24,36701 \text{ саж.}$$

§ 131. **Примѣръ 2.** *Изъяснить треугольникъ по двумъ сторонамъ и углу между ними.*

Даны стороны a и b и уголъ C между ними; найти углы A и B и сторону c . Имѣемъ:

$$A + B = 180^\circ - C; \text{ откуда } \frac{1}{2}(A + B) = 90^\circ - \frac{1}{2}C.$$

Кромѣ того въ § 119 нашли, что

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B)};$$

$$\text{откуда } \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B) = \frac{(a - b) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B)}{a + b}.$$

Изъ этого равенства опредѣлимъ величину $\frac{1}{2}(A - B)$, которую означимъ буквою m ; тогда

$$\frac{1}{2}(A + B) = 90^\circ - \frac{1}{2}C \text{ и } \frac{1}{2}(A - B) = m.$$

Сложивъ почленно эти равенства, найдемъ:

$$A = 90^\circ - \frac{1}{2}C + m;$$

вычтя-же почленно второе равенство изъ перваго, получимъ:

$$B = 90^\circ - \frac{1}{2}C - m.$$

Когда-же опредѣлимъ углы A и B , то сторону c найдемъ изъ пропорцій: $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$ или $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$.

Численный примѣръ. $a = 12,697$ аршина, $b = 9,9$ аршина и $C = 62^\circ 17' 48'',06$.

Вычисленіе $\frac{1}{2}(A - B)$.

$\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B) = \lg(a - b) + \lg \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B) - \lg(a + b).$	
$a + b = 22,597$	$\lg(a - b) = 0,4466925$
$a - b = 2,797$	$\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B) = 0,2186828$
$\frac{1}{2}(A + B) = 90^\circ - 31^\circ 8' 54'',03$	$- \lg(a + b) = \overline{2},6459492$
$= 58^\circ 51' 5'',97$	$\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B) = \overline{1},3113245$
	$\frac{1}{2}(A - B) = 11^\circ 34' 26'',36.$

Вычисленіе угловъ A и B .

$$\frac{1}{2}(A + B) = 58^\circ 51' 5'',97, \quad \frac{1}{2}(A - B) = 11^\circ 34' 26'',36;$$

откуда

$$A = 70^\circ 25' 32'',33 \text{ и } B = 47^\circ 16' 39'',61.$$

Вычисление стороны c .

$$\lg c = \lg a + \lg \sin C - \lg \sin A$$

$$\lg a = 1,1037011$$

$$\lg \sin C = 1,9471232$$

$$- \lg \sin A = 0,0258535$$

$$\lg c = 1,0766778; c = 11,93103 \text{ арш.}$$

§ 132. Если известны логарифмы чиселъ a и b , то можно дать слѣдующую формулу для опредѣленія $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B)$. Положимъ

$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \vartheta$; тогда $\frac{a - b}{a + b} = \frac{\operatorname{tg} \vartheta - 1}{\operatorname{tg} \vartheta + 1} = \operatorname{tg} \left(\vartheta - \frac{\pi}{4} \right)$ (§ 51) и потому

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B) = \operatorname{tg} \left(\vartheta - \frac{\pi}{4} \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B),$$

гдѣ ϑ опредѣляется изъ равенства: $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{a}{b}$.

§ 133. Можно найти сторону c , не опредѣляя угловъ A и B , посредствомъ введенія вспомогательнаго угла. Мы нашли (§ 118), что

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C;$$

но (§ 55) $\cos C = 2 \cos^2 \frac{1}{2} C - 1$, а потому

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 4ab \cos^2 \frac{1}{2} C$$

или

$$c^2 = (a + b)^2 - 4ab \cos^2 \frac{1}{2} C$$

или

$$c^2 = (a + b)^2 \left\{ 1 - \frac{4ab}{(a + b)^2} \cos^2 \frac{1}{2} C \right\}.$$

Опредѣлимъ уголъ ϑ такъ, чтобы

$$\sin^2 \vartheta = \frac{4ab}{(a + b)^2} \cos^2 \frac{1}{2} C \text{ или } \sin \vartheta = \frac{2\sqrt{ab}}{a + b} \cos \frac{1}{2} C;$$

тогда

$$c^2 = (a + b)^2 (1 - \sin^2 \vartheta), \text{ или } c^2 = (a + b)^2 \cos^2 \vartheta;$$

откуда

$$c = (a + b) \cos \vartheta.$$

Численный примѣръ. $a = 12,697$ арш., $b = 3,3$ саж. и $c = 62^\circ 17' 48'', 06$.

Вычисленіе угла δ .

$$\begin{aligned} \lg \sin \delta &= \lg 2 + \frac{1}{2} (\lg a + \lg b) + \\ &- \lg (a + b) + \lg \cos \frac{1}{2} C \\ \lg 2 &= 0,3010300 \\ \frac{1}{2} (\lg a + \lg b) &= 1,0496682 \\ - \lg (a + b) &= 2,6459492 \\ \lg \cos \frac{1}{2} C &= 1,9323880 \\ \lg \sin \delta &= 1,9290354 \\ \delta &= 58^{\circ} 7' 48'', 55. \end{aligned}$$

Вычисленіе стороны c .

$$\begin{aligned} \lg c &= \lg (a + b) + \lg \cos \delta \\ \lg (a + b) &= 1,3540508 \\ \lg \cos \delta &= 1,7226269 \\ \hline \lg c &= 1,0766777 \\ c &= 11,93103 \text{ арш.} \end{aligned}$$

§ 134. **Примѣръ 3** *Рѣшить треугольникъ по тремъ сторонамъ.*

Даны стороны a, b и c ; опред. углы A, B и C . Въ § 120 нашли

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\text{и } \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

Въ томъ случаѣ, когда надо опредѣлить всѣ углы треугольника, формула для тангенса половины угла имѣеть преимущество предъ другими, потому что, для опредѣленія угловъ, придется отыскать логарифмы только четырехъ чиселъ: $p, p-a, p-b$ и $p-c$; между тѣмъ, если возьмемъ формулу для синуса или косинуса половины угла треугольника, то придется отыскать логарифмы семи чиселъ: $p, p-a, p-b, p-c, a, b$ и c .

Численный примѣръ. $a = 3,7$ метра, $b = 4$ метр. и $c = 2,607$ метра.

$$\begin{array}{l} 2p = 10,307, \quad p = 5,1535 \qquad \lg p = 0,7121023 \\ p - a = 1,4535 \qquad \lg(p - a) = 0,1624150 \\ p - b = 1,1535 \qquad \lg(p - b) = 0,0620176 \\ p - c = 2,5465 \qquad \lg(p - c) = 0,4059437 \end{array}$$

Вычисленіе угла A .

$$\begin{array}{l} \lg \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \lg (p - b) + \lg (p - c) - \lg p - \lg (p - a) \\ \hline \lg (p - b) = 0,0620176 \\ \lg (p - c) = 0,4059437 \\ - \lg p = 1,2878977 \\ - \lg (p - a) = 1,8375850 \\ \hline \lg \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1,5934440 \\ \hline \frac{A}{2} = 82^{\circ} 5' 19'', 19 \\ A = 64^{\circ} 6' 38'', 38 \end{array}$$

Вычисление угла B .

$$\lg \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{\lg(p-a) + \lg(p-c) - \lg p - \lg(p-b)}{2}$$

$$\lg(p-a) = 0,1624150$$

$$\lg(p-c) = 0,4059437$$

$$-\lg p = 1,2878977$$

$$-\lg(p-b) = 1,9379824$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{1,7942388}{2}$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{B}{2} = 1,8971194$$

$$\frac{B}{2} = 38^{\circ} 16' 34'', 18$$

$$B = 76^{\circ} 33' 8'', 36$$

Вычисление угла C .

$$\lg \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\lg(p-a) + \lg(p-b) - \lg p - \lg(p-c)}{2}$$

$$\lg(p-a) = 0,1624150$$

$$\lg(p-b) = 0,0620176$$

$$-\lg p = 1,2878977$$

$$-\lg(p-c) = 1,5940563$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1,1063866}{2}$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 1,5531933$$

$$\frac{C}{2} = 19^{\circ} 40' 6'', 63$$

$$C = 39^{\circ} 20' 13'', 26$$

Про́вѣрка.

$$A = 64^{\circ} 6' 38'', 38$$

$$B = 76^{\circ} 33' 8'', 36$$

$$C = 39^{\circ} 20' 13'', 26$$

$$A + B + C = 180^{\circ} \text{ съ точн. до } 0'', 01.$$

§ 135. Если требуется определить одинъ изъ угловъ треугольника, напр. уголь A , то можно воспользоваться формулою или для

$\sin \frac{A}{2}$ или для $\cos \frac{A}{2}$. Опредѣлимъ уголь A по формулѣ $\sin \frac{A}{2} =$

$$= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$
 въ примѣрѣ изъ предыдущаго параграфа.

Имѣемъ:

$$\lg \sin \frac{A}{2} = \frac{\lg(p-b) + \lg(p-c) - \lg b - \lg c}{2}$$

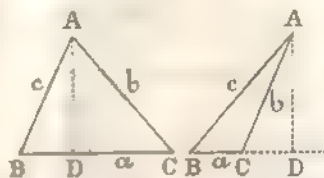
$\lg(p - b) = 0,0620176$	$\lg \sin \frac{A}{2} = 1,7248802$
$\lg(p - c) = 0,4059437$	$A = 32^{\circ} 3' 19'', 19$
$-\lg b = 1,3979400$	$A = 64^{\circ} 6' 38'', 38.$
$-\lg c = 1,5833590$	
$\lg \sin \frac{A}{2} = \frac{1,4497603}{2}$	

§ 136. Когда даны стороны треугольника, то его углы можно еще определить, разбивая данный

Фиг. 42.

Фиг. 43.

треугольник на прямоугольные треугольн. Въ самомъ дѣлѣ, когда углы B и C острые, то фиг. 42



$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = AC^2 - DC^2;$$

откуда

$$AB^2 - BD^2 = AC^2 - DC^2, \text{ или}$$

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - DC^2$$

или

$$(AB + AC)(AB - AC) = (BD + DC)(BD - DC);$$

но такъ какъ $BD + DC = BC$, то

$$(AB + AC)(AB - AC) = BC(BD - DC).$$

Изъ этого равенства можемъ определять разность $BD - DC$, потому что остальные члены известны; зная же $BD - DC$ и $BD + DC$, определяемъ BD и DC . Тогда

$$\cos B = \frac{BD}{AB} \text{ и } \cos C = \frac{DC}{AC};$$

откуда, по логарифмамъ, найдемъ углы B и C .

Когда-же одинъ изъ угловъ B и C тупой, напр. уголь C (чер. 43), то получимъ также, что

$$(AB + AC)(AB - AC) = (BD + DC)(BD - DC);$$

но $BD - DC = BC$, а потому

$$(AB + AC)(AB - AC) = (BD + DC)BC;$$

откуда определяемъ величину $BD + DC$.

Зная же $BD + DC$ и $BD - DC$, найдемъ BD и DC ; тогда

$$\cos B = \frac{BD}{AB} \text{ и } \cos(180^{\circ} - C) = \frac{DC}{AC}.$$

Изъ этихъ равенствъ, по логарифмамъ, найдемъ углы B и $180^{\circ} - C$, а следовательно и уголь C .

§ 137. **Примѣръ 4.** Рѣшить треугольникъ по двумъ сторонамъ и углу, противолежащему одной изъ нихъ.

Даны стороны a и b и уголъ A ; требуется опредѣлить сторону c и углы B и C . Имѣемъ (§ 117):

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}; \text{ откуда } \sin B = \frac{b}{a} \sin A.$$

Разсмотримъ здѣсь три случая:

1) $\frac{b}{a} \sin A < 1$. Въ такомъ случаѣ для угла B найдемъ два значенія, изъ которыхъ одинъ будетъ служить дополненіемъ другому до 180° (§ 40), т. е. уголъ B будетъ или острый или тупой.

Если при этомъ $a > b$, то уголъ A долженъ быть болѣе угла B ; а слѣдовательно для угла B надо взять меньшую величину, потому что если бы взяли для угла B второе значеніе, т. е. большее 90° , то и уголъ A былъ бы болѣе 90° и тогда бы сумма угловъ A и B была бы болѣе 180° , что невозможно; слѣдовательно, въ разсматриваемомъ случаѣ, имѣемъ для угла B только одно значеніе. Если же $a < b$, то и $A < B$; въ такомъ случаѣ для угла B имѣемъ два значенія.

Когда найдемъ уголъ B , то уголъ C опредѣлимъ по формулѣ: $C = 180^\circ - (A + B)$, а сторону c изъ равенства:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}.$$

Въ томъ случаѣ, когда для B имѣемъ два значенія, то и для стороны c и угла C будемъ имѣть по два значенія; слѣдовательно получимъ два треугольника.

2) Если $\frac{b}{a} \sin A = 1$, то $\sin B = 1$ и $B = 90^\circ$; въ такомъ случаѣ для c и C найдемъ только по одной величинѣ. Рѣшенія не будетъ, если $a < b$ и $A = 90^\circ$, а также, если $a = b$ и $A > 90^\circ$.

3) Если $\frac{b}{a} \sin A > 1$, то $\sin B > 1$, что невозможно (§ 22); слѣдов. нельзя опредѣлить угла B , т. е. рѣшить треугольникъ.

Численный примѣръ. $a = 142$ арш., $b = 50$ арш. и $A = 79^\circ 42' 38''$.

Вычисленіе угла *B*.

$$\lg \sin B = \lg b + \lg \sin A - \lg a$$

$$\lg b = 1,6989700$$

$$\lg \sin A = 1,9929589$$

$$- \lg a = 3,8477117$$

$$\lg \sin B = 1,5396406$$

$$B = 20^\circ 16' 13'', 21$$

Другое значеніе для угла *B*:

$$180^\circ - 20^\circ 16' 13'', 21 =$$

$$= 159^\circ 43' 46'', 79$$

не удовлетворяетъ вопросу.

Численный примѣръ. $a = 2,7456$ саж., $b = 3,9$ саж. и $A = 32^\circ 36' 0'', 7$.

Вычисленіе угла *B*.

$$\lg b = 0,5910646$$

$$\lg \sin A = 1,7314063$$

$$- \lg a = 1,5613627$$

$$\lg \sin B = 1,8838336$$

$$B = 49^\circ 56' 2'', 36$$

или $B = 180^\circ - 49^\circ 56' 2'', 36$

$$= 130^\circ 3' 57'', 64.$$

Вычисленіе угла *C*.

$$C = 180^\circ - (A + B) = 80^\circ 1' 8'', 79$$

Вычисленіе стороны *c*.

$$\lg c = \lg a + \lg \sin C - \lg \sin A$$

$$\lg a = 2,1522883$$

$$\lg \sin C = 1,9933770$$

$$- \lg \sin A = 0,0070411$$

$$\lg c = 2,1527064$$

$$c = 142,1368 \text{ арш.}$$

Вычисленіе угла *C*.

$$C = 180^\circ - (A + B)$$

$$C = 97^\circ 27' 56'', 94$$

или

$$C = 17^\circ 20' 1'', 66.$$

Вычисленіе стороны *c*.

$$\lg c = \lg a + \lg \sin C - \lg \sin A.$$

Первое рѣшеніе.

$$C = 97^\circ 27' 56'', 94$$

$$\lg c = 0,4386373$$

$$\lg \sin C = 1,9963026$$

$$- \lg \sin A = 0,2685937$$

$$\lg c = 0,7035336$$

$$c = 5,052817 \text{ саж.}$$

Второе рѣшеніе.

$$C = 17^\circ 20' 1'', 66$$

$$\lg a = 0,4386373$$

$$\lg \sin C = 1,4741258$$

$$- \lg \sin A = 0,2685937$$

$$\lg c = 0,1813568$$

$$c = 1,518297 \text{ саж.}$$

Численный примѣръ. $a = 1$ саж., $b = 6,25$ арш. и $A = 72^\circ 14''$.

Опредѣленіе угла *B*.

$$\lg b = 0,7958800$$

$$\lg \sin A = 1,9782159$$

$$- \lg a = 1,5228787$$

$$\lg \sin B = 0,2969746,$$

что невозможно, а потому, при этих данных, нельзя рѣшить треугольникъ.

§ 138. **Замѣчаніе.** Если известны тригонометрическія величины угловъ, то, въ такомъ случаѣ, иногда рѣшаютъ треугольникъ и безъ помощи логарифмическихъ таблицъ.

Примѣръ 1. Найти катетъ a въ прямоугольномъ треугольникѣ, въ кот. гипотенуза $c = 5$ саж., а острый уголъ $A = 30^\circ$. Имѣемъ:

$$a = c \sin A = 5 \sin 30^\circ = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2,5 \text{ саж.}$$

Примѣръ 2. Найти сторону a въ треугольникѣ ABC , въ кот. двѣ другія стороны: $b = 2$ арш и $c = 3$ арш. и уголъ между ними $A = 60^\circ$. Имѣемъ (§ 118): $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, а потому

$$a^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos 60^\circ = 4 + 9 - 12 \cdot \frac{1}{2} = 7;$$

$$\text{откуда } a = \sqrt{7} = 2,64 \text{ арш.}$$

ОТДѢЛЬ X.

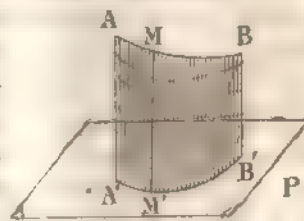
Описаніе нѣкоторыхъ землѣмѣрныхъ инструментовъ. — Приложение тригонометріи къ рѣшенію нѣкоторыхъ задачъ на мѣстности

§ 139. **Понятіе о планѣ мѣстности.** Графическое изображеніе на плоскости небольшого участка земной поверхности наз. *планомъ*, а самыя дѣйствія, производимыя на мѣстности для составленія плана, наз. *съёмкою*. А такъ какъ на поверхности земли существуютъ различныя неровности, то поэтому на планахъ помѣщаютъ не самую мѣстность, а ея *горизонтальное проложениіе*.

Намъ известно, что *отвѣсною* или *вертикальною* линіею наз. та, которой направленіе совпадаетъ съ путемъ свободно падающаго тѣла. На практикѣ, для полученія этого направленія, берутъ нить и къ одному ея концу прикрѣпляютъ нѣкоторый грузъ; тогда, поднявъ другой конецъ нити на столько, чтобъ грузъ не касался ни какого предмета, нить займетъ вертикальное положеніе. Плоскость, перпендикулярная къ вертикальному направленію, наз. *горизонтальною*; она будетъ параллельна поверхности спокойно стоячей воды.

Основание перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки на горизонтальную плоскость, наз. *горизонтальнымъ проложениемъ* этой точки. Горизонтальнымъ проложениемъ

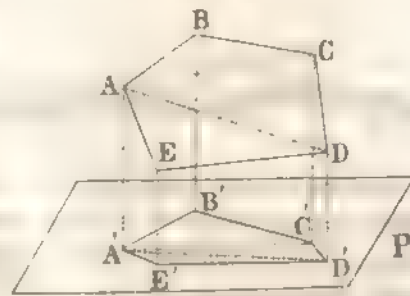
Фиг. 44.



какой либо линии на горизонтальной плоскости наз. такая линия въ плоскости, на которой находится горизонтальная проложения точекъ данной линии. Такъ, напримеръ, если линия $A'B'$ будетъ горизонтальное проложение линии AB на плоскости P , то, опустивъ перпендикуляръ MM' изъ точки M линии AB на эту плоскость, увидимъ, что точка M' лежитъ на линии $A'B'$. Если линия будетъ прямая, то и горизонтальное проложение ея будетъ тоже прямою, потому что перпендикуляры, опущенные изъ точекъ прямой на плоскость, будутъ лежать въ плоскости, перпендикулярной къ данной; пересѣчение же плоскостей есть прямая.

Горизонтальнымъ проложениемъ части земной поверхности на плоскости наз. площадь, ограниченная горизонтальнымъ проложениемъ на ней контура этой

Фиг. 45.



части. Такъ, если фигура $ABCDE$ есть часть земной поверхности, то ея горизонтальное проложение на плоскости P получимъ, опустивъ перпендикуляры: AA' , BB' , CC' , ... на эту плоскость и соединивъ прямыми основания A' , B' , C' , ... этихъ перпендикуляровъ.

Такимъ образомъ, для изображенія на бумагѣ небольшой части земной поверхности, воображаютъ горизонтальную плоскость, на которой помѣщаютъ горизонтальное проложение этой части, рассматривая ея контуръ какъ многоугольникъ, котораго периметръ близко къ нему подходитъ; потомъ, на основаніи геометрическихъ правилъ, чертятъ на бумагѣ въ уменьшенномъ видѣ фигуру, подобную той, котор. получилась въ горизонтальномъ проложении, соблюдая при этомъ, какъ пропорциональность линий, такъ и взаимное ихъ положеніе. Но, чтобы составить планъ, надо умѣть помѣрить на

містности длины ліній и величины угловъ, а потому займемъ описаніемъ инструментовъ, помощью которыхъ измѣряють линіи и углы на мѣстности. Для нанесенія же на бумагу измѣренныхъ прямыхъ и угловъ служатъ масштабъ и транспортиръ, употребленіе которыхъ указано въ начальной геометріи *).

§ 140. Измѣреніе длины прямой на мѣстности. Кратчайшее разстояніе между двумя какими либо предметами опредѣляется длиною прямой, соединяющей эти предметы; поэтому, прежде чѣмъ измѣрить разстояніе между двумя предметами, кот. иногда отстоять другъ отъ друга на довольно большое разстояніе, надо опредѣлять направленіе прямой или, какъ говорятъ, *пронѣсти* прямую. Это дѣлается помощью колець, втыкаемыхъ въ землю и расположенныхъ такъ, чтобы два крайніе предмета и кольца лежали бы въ одной вертикальной плоскости и чтобы сосѣдніе изъ нихъ были бы видны.

Положимъ требуется означить направленіе между предметами A и B , т. е. пронѣсти линію AB . Если нѣтъ естественныхъ зна-

Фиг. 46.



ковъ въ A и B , то ставятъ искусственные знаки, какъ на примѣръ шесты съ навязаннымъ съ верху пучкомъ соломы

или флагомъ; такіе шесты наз. *вѣхами*.

Поставивъ въ точкахъ A и B вѣхи въ отвѣсномъ положеніи, съемщикъ посылаетъ рабочаго по направленію къ B , а самъ становится нѣсколько назадъ вѣхи A и такъ, чтобы глазъ былъ бы въ вертикальной плоскости, проходящей чрезъ края вѣхъ A и B . Рабочій же, взявъ колъ и отойдя отъ вѣхи A на разстояніи отъ 30 до 50 сажень, останавливается въ точкѣ C и передвигаетъ колъ вправо или влево, смотря по знаку съемщика, пока край его кола не будетъ въ плоскости, проходящей чрезъ края вѣхъ A и B ; тогда рабочій втыкаетъ колъ въ землю и отходитъ далѣе въ направленіи къ B , а съемщикъ остается на своемъ мѣстѣ. Рабочій,

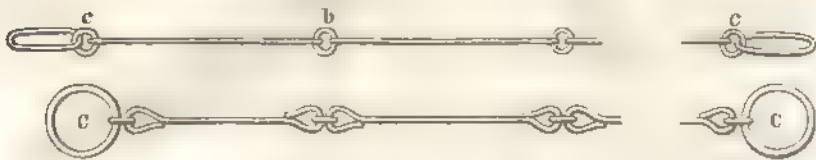
*) Желающіе ознакомиться съ употребленіемъ масштаба и транспортира могутъ обратиться къ геометріи (§§ 33, 34, § 177 — § 180), составленной мною.

отойдя отъ кола C отъ 30 до 50 сажень, останавливается и передвигаетъ колъ по указанію съемщика такъ, чтобы край кола лежалъ бы въ одной плоскости съ краями кола C' и вѣхи B и т. д.

Когда опредѣлено направленіе линіи, тогда приступаютъ къ измѣренію ея. Для этого служатъ: мѣрная цѣпь, веревка, тесьма, жезлы и т. д.

Мѣрная цѣпь бываетъ обыкновенно длиною въ 10 сажень и состоитъ изъ колѣвъ, сдѣланныхъ изъ проволоки, достаточной толщины, т. е. чтобы цѣпь не была бы очень тяжела и въ то же время колѣва не гнулись. Число колѣвъ въ цѣпи бываетъ 70 или 100; въ первомъ случаѣ разстояніе между центрами колецъ c и b равно

Фиг. 47.



футу, а во второмъ 0,1 сажени. Длина цѣпи въ 10 сажень заключается или между центрами небольшихъ колецъ c и c' или же между центрами большихъ колецъ C и C' .

Принадлежности цѣпи суть: два цѣпныхъ кола, служащихъ для натягиванія цѣпи въ требуемомъ направленіи, и 10 цѣпныхъ колышковъ для означенія на мѣстности концовъ цѣпи.

Цѣпной колъ имѣетъ въ длину около двухъ аршинъ и дѣлается изъ дерева такой толщины, чтобы крайнія кольца C и C' можно было бы надѣвать на его; нижній конецъ кола заостренъ и немного выше вдѣлана поперечная палочка, чтобы кольцо не сваливалось бы при переноскѣ. Цѣпные же колышки дѣлаются изъ желѣзной проволоки толщиной около 2 линий, а длиною около фута; снизу они заострены, а сверху загнуты для того, чтобы удобно было ихъ переносить. За неимѣніемъ желѣзныхъ колышковъ, можно употреблять деревянные, нижній конецъ которыхъ заостренъ, а верхній снабженъ веревкою для удобства переноски.

Измѣреніе провѣшенной линіи AB (фиг. 46) цѣпью, помѣщенной на фигурѣ 47, производится такъ: рабочіе надѣваютъ кольца C и C' на цѣпные кольца и одинъ изъ нихъ ставятъ вертикально

цѣпной коль въ точкѣ *A*, а другой идетъ по направленію къ *B*, пока не будетъ натянута цѣпь, и передвигаетъ свой цѣпной коль, по указанію товарища, вправо или влѣво, пока его коль не будетъ въ одной плоскости съ вѣхами. (При этомъ надо наблюдать, чтобы цѣпь была натянута и чтобы колѣна лежали правильно; для чего надо встряхнуть цѣпь). Затѣмъ, передній рабочій вынимаетъ свой цѣпной коль и ставитъ на его мѣсто малый колышекъ и, давъ знакъ своему товарищу, идетъ съ цѣпью далѣе, пока задній рабочій не дойдетъ до колышка. Здѣсь онъ вынимаетъ колышекъ и ставитъ на его мѣсто цѣпной коль, а второй рабочій, встряхнувъ цѣпь и вытянувъ ее, какъ было уже сказано, ставитъ второй колышекъ и т. д. Дойдя до точки *B*, передній рабочій вытягиваетъ цѣпь и ставитъ цѣпной коль по направленію *AB*; тогда отсчитываютъ по цѣпи число сажень и долей сажени отъ послѣдняго колышка. Число колышковъ, собранныхъ заднимъ рабочимъ, покажетъ сколько десятковъ сажень содержитъ разсматриваемая длина *AB* и такимъ образомъ будемъ знать: сколько длина *AB* содержитъ десятковъ сажень, единицъ и долей сажени.

§ 141. Для плановъ нужно знать горизонтальныя проложенія линій, а потому надо обращать вниманіе на мѣстность и въ случаѣ, если будетъ она поката, то поднять одинъ конецъ цѣпи, которую въ этомъ случаѣ укорачиваютъ на столько, чтобы цѣпь была горизонтальна. Въ этомъ случаѣ измѣренье линіи удобнѣе произвести *ватерпасомъ*.

Ватерпасъ состоитъ изъ бруска *AB* длиною въ сажень, шириною

Фиг. 48.



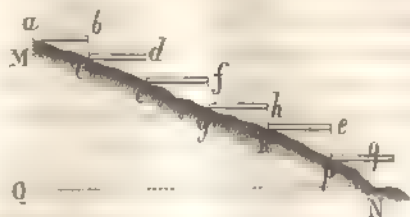
около $2\frac{1}{2}$ дюймовъ и толщиной въ дюймъ, раздѣленнаго на футы и дюймы или десятия и соты сажени; сверху бруска придѣланы

еще два равные бруска, составляющіе равнобедренный треугольникъ. Въ вершинѣ треугольника прикрѣплена нить съ отвѣсомъ, а въ серединѣ бруска проведена черточка; такъ, что когда ватерпасъ поставленъ горизонтально, то нить должна прикрывать эту черточку.

Чтобы опредѣлить горизонтальное проложеніе линіи *MN*, приложимъ конецъ *A* линейки къ началу *M* линіи и подвигнемъ

другой конецъ *B* на столько, чтобы ватерпассъ занялъ горизонтальное положеніе *ab*; за-
мѣчаемъ, помощію отвѣса.

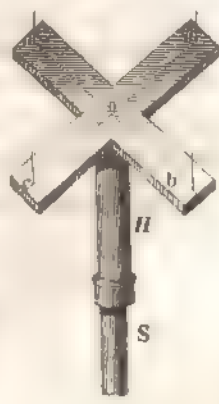
Фиг. 49.



точку *c* на линіи *MN*, приложивъ его къ *b*. Послѣ этого прикладываемъ конецъ *A* ватерпасса къ точкѣ *c* и, поступая по предъидущему, опредѣляемъ еще точку *e* и т. д. Сумма линій *ab*, *cd*,... очевидно представитъ длину горизонтальнаго проложенія линіи *MN*.

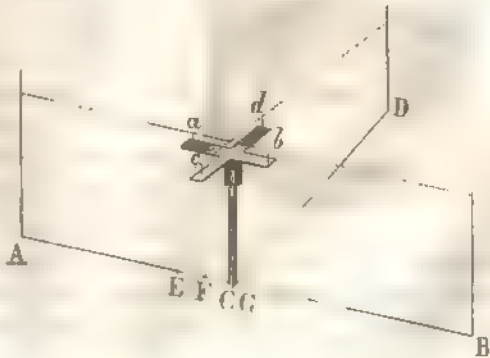
§ 142. Эккеръ. Для проведенія на мѣстности перпендикулярныхъ и параллельныхъ линій служитъ инструментъ, наз. *эккеромъ*. Простой изъ нихъ есть крестообразный, состоящій изъ двухъ деревянныхъ или металлическихъ брусковъ, длиною отъ 1/2 до 1 фута и соединенныхъ крестообразно (фиг. 50). На концахъ брусковъ прикрѣплены стальные шпильки *a*, *b*, *c*, *d* такъ, чтобы линіи *ab* и *cd*, ихъ соединяющія, составляли прямой уголъ. Въ серединѣ креста дѣлается отверстіе или пустая цилиндрическая трубка *H*, которая надѣвается на колы *S*.

Фиг. 50.



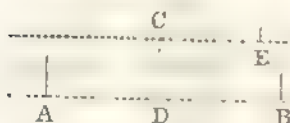
Чтобы помощію эккера возстановить перпендикуляръ къ линіи *AB* въ точкѣ *C*, втыкаютъ эккеръ въ землю въ точкѣ *C* и приводятъ его въ горизонтальное положеніе; одну пару шпильковъ *a* и *b* наводятъ на точки *A* и *B*, а по направленію другихъ ставятъ вѣху *D*. Прямая *CD* будетъ искомымъ перпендикуляръ.

Фиг. 51.



Если же требуется опустить перпендикуляръ изъ точки D на линію AB помощью эккера, то становятся съ нимъ на линію BA и въ томъ мѣстѣ, гдѣ приблизительно должно быть основаніе перпендикуляра, напримѣръ въ точку E , или F , или G ; потомъ представляютъ эккеръ по линіи AB до тѣхъ поръ, пока не найдется такая точка C , для которой одна пара шпильковъ расположена по направленію AB , а другая покрываетъ вѣху D . Прямая CD будетъ искомымъ перпендикуляромъ.

Фиг. 52.



Для проведенія чрезъ точку C прямой, параллельной AB , опустимъ изъ точки C перпендикуляръ CD на AB и чрезъ точку C проведемъ прямую CE , перпендикулярно CD . Прямая CE будетъ искомаю.

Кромѣ описаннаго нами эккера есть еще другіе, помощью которыхъ можно откладывать углы въ 45° и 90° . Но вообще для измѣренія какихъ бы то ни было угловъ на мѣстности служатъ: *буссоль*, *астролябія* и *мензула*.

§ 143. **Буссоль.** Буссоли существуютъ нѣсколькихъ системъ, а потому мы остановимся здѣсь на болѣе употребительной изъ нихъ:

фиг. 53.



буссоли *Шмалькайдера*. Она состоитъ изъ мѣдной цилиндрической коробки, діаметра около 3 дюймовъ и высотой $\frac{3}{4}$ дюйма. На двѣ коробки, въ центрѣ ея, утверждены шпиль, на которомъ вращается магнитная стрѣлка ns ; къ этой стрѣлкѣ прикрѣпленъ на глухо кружокъ изъ тонкой мѣдной латуни, нѣсколько меньшаго діаметра коробки. На кружкѣ означены градусныя дѣленія отъ 0 до 360° и подписи расположены къ западу. Коробка закрывается стекломъ и сверхъ того, при переноскѣ, мѣдною крышкою. Къ одному краю коробки придрѣлана, на шарнирѣ, мѣдная пластинка d' , имѣющая въ серединѣ четырехугольный прорѣзъ, посредникъ котораго протянуть волосокъ; эта пластинка называется *предметнымъ диоптромъ*.

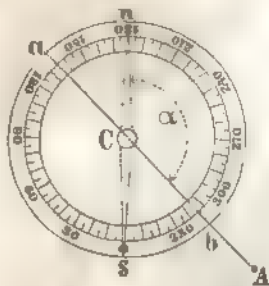
На другомъ же краю коробки, діаметрально противоположно предметному діоптру, придѣланы два бруска b и b , между которыми движется брусокъ, съ прикрѣпленнымъ къ нему, на шарнирѣ, мазнымъ діоптромъ d ; онъ состоитъ изъ мѣдной пластинки съ узкимъ продольнымъ отверстіемъ, противъ котораго укрѣплена прямоугольная и равнобедренная хрустальная призма p ; чрезъ эту призму можно видѣть въ увеличенномъ видѣ градусную надпись круга K , въ обратномъ порядкѣ. Слѣдовательно, чрезъ главный діоптръ можно видѣть и волосокъ предметнаго діоптра и градусную надпись. Вырѣзъ въ глазномъ діоптрѣ и волосокъ въ предметномъ расположены такъ, чтобы они лежали въ плоскости, перпендикулярной къ плоскости круга K и проходящей чрезъ центръ этого круга; эта плоскость называется *коллимационною*.

Къ дну буссоли придѣлана внизъ трубка, надѣваемая на колъ, который снизу заостренъ для того, чтобы можно было втыкать въ землю.

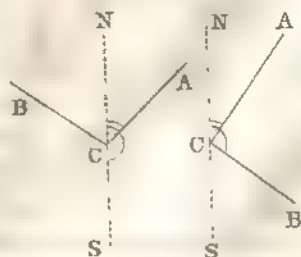
Употребленіе буссоли. Помощію буссоли опредѣляется непосредственно уголъ, составленный направленіемъ прямой, находящейся въ коллимационной плоскости и проходящей чрезъ данную точку, съ магнитнымъ меридіаномъ; этотъ уголъ наз. *азимутомъ* и отсчитывается отъ сѣвера чрезъ востокъ къ данному направленію до 360° .

Для опредѣленія азимута какого-либо направленія CA ставятъ буссоль въ точку C и приводятъ ее, на глазъ, въ горизонтальное положеніе. Направляютъ діоптры на точку A (a глазной, а b предметный діоптръ) такъ, чтобы точка A была въ коллимационной плоскости и смотрятъ чрезъ призму номеръ градуснаго дѣленія; а такъ какъ нуль градусовъ при южномъ концѣ стрѣлки s , то чрезъ призму опредѣлимъ число градусовъ дуги sa , измѣряющей уголъ sca или равный ему уголъ ACn ; уголъ же ACn будетъ азимутъ линіи AC . Помощію буссоли можно опредѣлять уголъ, составленный двумя направленіями CA и CB . Для

Фиг. 54.



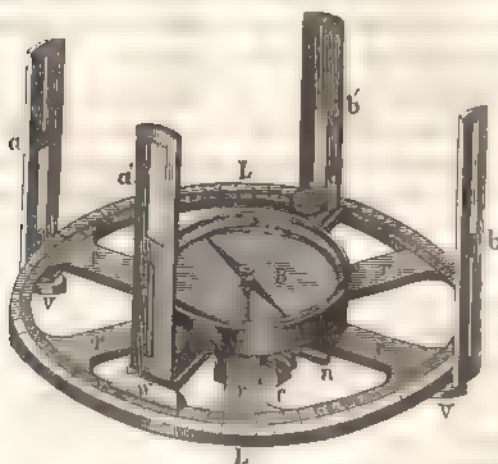
Фиг. 55.



этого опредѣляютъ азимуты боковъ угла ACB , т. е. $\angle ACN$ и BCN и берутъ разность азимутовъ; если эта разность меньше 180° , то полученный уголъ въ разности и будетъ искомымъ, а если разность азимутовъ будетъ больше 180° , то искомымъ уголъ будетъ равенъ дополненію до 360° найденному углу въ разности азимутовъ.

§ 144. **Астролябія.** Для непосредственнаго и болѣе точнаго измѣренія угловъ на мѣстности и опредѣленія азимутовъ данныхъ направлений служитъ *астролябія*. Она состоитъ изъ мѣднаго кру-

Фиг. 56.



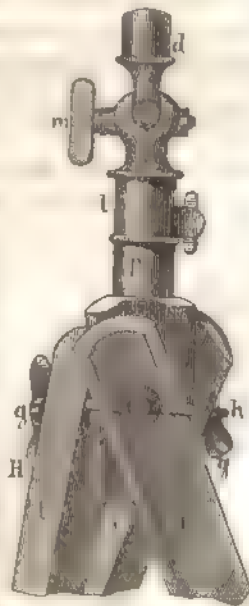
га L и L , діаметра отъ 8 до 12 дюймовъ и раздѣленнаго на градусы отъ 0° до 360° , подписъ которыхъ идетъ въ одну сторону; этотъ кругъ, назыв. *лимбомъ*, соединенъ съ своимъ центромъ четырьмя или шестью пластинками. На концѣ діаметра, проходящаго чрезъ 0° и 180° , прикрѣплены къ лимбу двѣ пластинки a и b , перпендикулярныя въ плоскости

лимба; эти пластинки, называемыя *диоптрами*, имѣютъ: одна — внизу тонкій прорѣзь, а сверху четырехугольная, вдоль котораго протянуть волосокъ, а другая — внизу четырехугольный прорѣзь, вдоль котораго протянуть волосокъ, а сверху узкій прорѣзь. Прорѣзы и волоски въ диоптрахъ расположены такъ, что волоски, середины прорѣзовъ и діаметръ, проходящій чрезъ 0° и 180° , лежатъ въ одной плоскости, перпендикулярной къ плоскости лимба; эта плоскость наз. *коллимационною*.

На лимбѣ положена мѣдная линейка или *амбрада*, укрѣпленная въ центрѣ лимба такъ, что она можетъ свободно вращаться; къ концамъ ея прикрѣплены винтами g' диоптры a' и b' , наз. *подвижными*, въ отличіе отъ двухъ первыхъ, называемыхъ *неподвижными* и прикрѣпленныхъ къ лимбу винтами v и g .

Длина алидады нѣсколько болѣе діаметра внутренняго круга лимба; на одномъ изъ округленныхъ концовъ ея *ис* намѣчены дѣленія, служащія для болѣе точнаго опредѣленія угловъ; эти дѣленія наз. *нонусомъ* или *верньеромъ*, а тотъ діоптръ, подлѣ котораго нонусъ, наз. *глазнымъ*, а противоположный — *предметнымъ*. На обоихъ концахъ алидады имѣются черточки, наз. *показателями* или *индексами*, находящіяся въ одной коллимаціонной плоскости подвижныхъ діоптровъ. Въ серединѣ алидады прикрѣпленъ компасъ *B*, состоящій изъ цилиндрической коробки, внутри которой на днѣ укрѣпленъ высеребранный кругъ съ градуснымъ дѣленіемъ, а въ серединѣ круга, на шпиль. находится магнитная стрѣлка. На днѣ коробки начерченъ діаметръ, находящійся въ коллимаціонной плоскости подвижныхъ діоптровъ; отъ этого діаметра идутъ градусныя подлины отъ 0° до 90° въ обѣ стороны. Коробка закрывается стекломъ и сверхъ того, при

Фиг. 57.

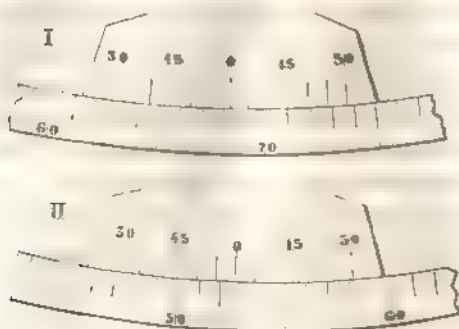


переноскѣ, накрывается мѣдною крышкою. Снизу лимба придѣлана трубочка *c*, кот. надѣвается на штативъ (фиг. 57), состоящій изъ *баксы* и деревяннаго треножника. Устройство баксы слѣдующее: къ цилиндру *d*, кот. долженъ плотно входить въ трубочку *c*, придѣланъ мѣдный шаръ *k*, называемый *яблокомъ*; это яблоко помещено между двумя шарообразными пустыми половинками, изъ которыхъ одна придѣлана къ цилиндру *l*, а другая прижимается къ ней винтомъ *m*. При ослабленіи этого винта, яблоко можетъ свободно двигаться, а потому астролябія можетъ принять горизонтальное, наклонное и вертикальное положеніе. Бакса надѣвается на выступъ *p*, прикрѣпленный къ треножнику *H*.

Дуга нонуса, равная дугѣ въ 11° лимба, дѣлится на 12 частей; такъ, что разность между градусомъ лимба, и дѣленіемъ нонуса равна $\frac{1}{12}$ градуса или 5', а потому, въ разсм. случаѣ, уголъ можемъ опредѣлить съ точностью до 5'. Показатель алида-

ды, т. е. среднее дѣленіе нониуса, означается 0, а при остальныхъ дѣленіяхъ идутъ

Фиг. 58.



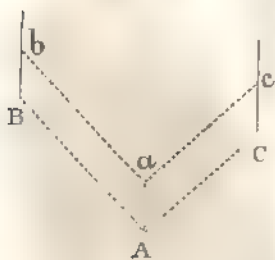
подписью лимба и расположены, какъ указано на 58 фигурѣ; такимъ образомъ при совпадении третьей черты отъ нуля нониуса (фиг. 58, I) съ градуснымъ дѣленіемъ, уголь, указываемый показателемъ 0, будетъ равенъ $68^{\circ} 15'$, а при совпадении

съ градуснымъ дѣленіемъ четвертой черты нониуса отъ 0 (фиг. 58, II), уголь, определяемый показателемъ, равенъ $52^{\circ} 40'$.

Въ другихъ астролябіяхъ лимбъ дѣлятъ на 360 градусовъ и каждый градусъ пополамъ. Дугу нониуса берутъ равною 29 дѣленіямъ лимба и дѣлятъ на 30 равныхъ частей; тогда разность между дѣленіемъ лимба и дѣленіемъ нониуса будетъ $\frac{30'}{30} = 1'$; слѣд. по мощію этой астролябіи можно найти уголь съ точн. до $1'$.

Измѣреніе горизонтальнаго угла помощью астролябіи. Пусть требуется опредѣлить уголь, составленный направленіями AB и AC .

Фиг. 59.



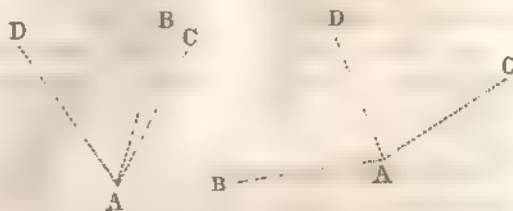
Ставимъ астролябію въ вершину A угла BAC и при томъ такъ, чтобы центръ лимба и точка A находились бы въ одной вертикальной линіи, чего можно достигнуть помощью отвѣса; ослабивъ винтъ m , приводимъ астролябію въ горизонтальное положеніе; послѣ чего закрѣпляемъ этотъ винтъ. Затѣмъ, ослабивъ нажимной винтъ n лимба, поворачиваемъ его на столько, чтобы

узкое отверстіе въ одномъ неподвижномъ діоптрѣ, волосокъ въ противоположномъ ему діоптрѣ и предметъ C (визируемый) были бы въ одной плоскости; закрѣпляемъ этотъ винтъ и вращаемъ алидаду до тѣхъ поръ, пока узкій прорѣзъ глазаго діоптра, волосокъ въ предметномъ діоптрѣ и визируемый предметъ B , не бу-

дуть лежать въ одной плоскости. Послѣ этого отсчитываютъ по лимбу число градусовъ, начиная отъ 0° (при неподвижномъ діоптрѣ) до показателя нониуса, а число минутъ отсчитываютъ по нониусу отъ черты его показателя до черты совпаденія дѣленія нониуса съ градуснымъ дѣленіемъ лимба. Замѣтимъ, что если подписи лимба идутъ отъ 0° до 360° влѣво, то неподвижные діоптры направляютъ на правый предметъ, а подвижные на лѣвый; но, если подписи лимба идутъ вправо,

Фиг. 60.

Фиг. 61.



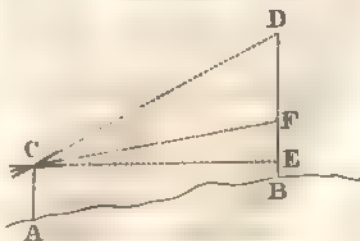
то поступаютъ обратно. Когда измѣряемый уголъ CBA будетъ очень малъ, такъ что, при наведеніи, подвижные діоптры закрываютъ

собою неподвижные, то надо поступить слѣд. образомъ: взять еще предметъ D (фиг 60) или поставить колъ въ точку D и опредѣлить $\angle CAD$ и BAD ; тогда разность этихъ угловъ будетъ искомымъ угломъ. Когда же опредѣляемый $\angle CAB$ (фиг. 61) будетъ близокъ къ 180° , то берутъ точку D внутри $\angle CAB$ и опредѣляютъ $\angle CAD$ и BAD ; взявъ сумму этихъ угловъ, получимъ искомый $\angle CAB$.

Измѣреніе вертикальнаго угла помощію астролябіи. Пусть требуется опредѣлить вертикальный уголъ, составленный направлениемъ CD съ горизонтомъ, т. е.

$\angle DCE$. Ставимъ въ точкѣ A астролябію и, ослабивъ нажимаемый и винтъ баксы, обращаемъ яблоко около стержня этого винта такъ, чтобы лимбъ астролябіи принялъ отвѣсное положеніе, а движеніемъ около цапфы штатива приводимъ лимбъ въ направленіе вертикальной плоскости, проходящей чрезъ AB или BD .

Фиг. 62.



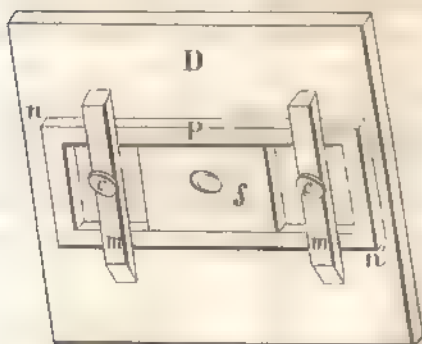
Индексъ алидады ставимъ въ совпаденіе съ дѣленіемъ 90° лимба и вращаемъ лимбъ около его оси до тѣхъ поръ, пока нить съ отвѣсомъ, пропущенная чрезъ прорѣзъ верхняго подвижнаго діоптра коснется волоска противоположнаго ему нижняго; тогда

закрѣпляютъ нажимательные винты лимба и бакси. Такимъ образомъ коллимаціонная плоскость подвижныхъ діоптровъ будетъ имѣть отвѣсное положеніе, а коллимаціонная плоскость неподвижныхъ — горизонтальное. Затѣмъ, не сдвигая лимба, направляютъ подвижные діоптры на точку D ; тогда показаніе верньера выразитъ величину угла DCE съ точн. до $30'$. Чтобы опредѣлить наклоненіе линіи AB къ горизонту, ставятъ въ точкѣ B вѣху и на ней замѣчаютъ точку E на высотѣ BE , равной высотѣ инструмента, и опредѣляютъ, какъ было сказано, уголъ FCB , кот. и будетъ искомымъ.

Для болѣе точныхъ измѣреній вертикальныхъ угловъ служатъ: *астролябія съ зрительною трубою, универсальныя инструменты и кипрегель.*

§ 145. Мензула. Мензула состоитъ изъ доски и штатива съ треножникомъ. Мензульная доска бываетъ всегда квадратною, у которой бокъ длиною отъ 12 до 26 дюймовъ, и дѣлается изъ прочнаго и сухаго дѣрева; на верхней сторонѣ доски натягивается бумага, а къ нижней прикрѣплены винтами s и s , двѣ деревянныя скобы m и m , посредствомъ которыхъ она соединяется со штативомъ мензулы.

Фиг. 63.

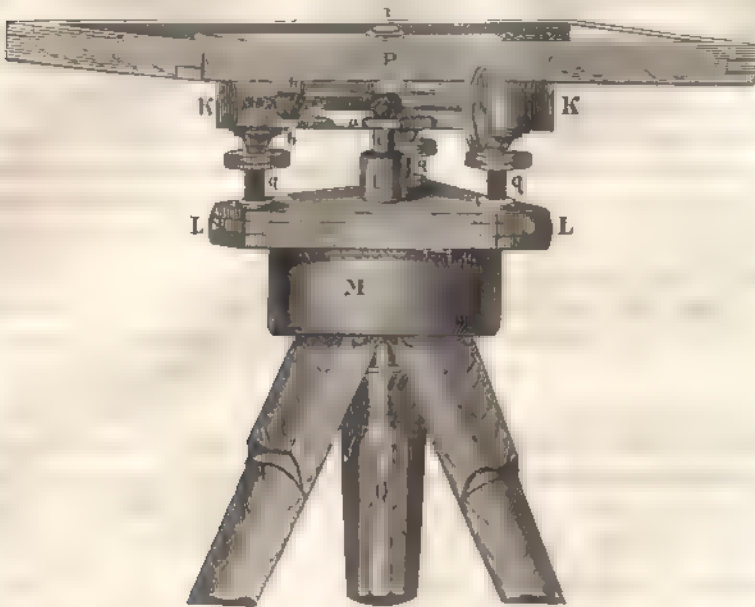


Верхняя часть штатива (фиг. 64) состоитъ изъ круга

K , на который накладывается продолговатая доска P ; къ кругу прикрѣпляется мензульная доска помощью скобъ m и m . Кругъ K лежитъ на трехъ подъемныхъ винтахъ q , q и q , посредствомъ которой доска P приводится въ горизонтальное положеніе; эти подъемные винты находятся въ углахъ деревяннаго треугольника L , прикрѣпленнаго къ кругу M , къ которому приделаны ножки штатива. Въ серединѣ круга K проходитъ пустой цилиндръ, закругленный снизу и который сверху прикрѣпленъ къ доскѣ P помощью гайки i , такъ, что доска P можетъ на этомъ цилиндрѣ вращаться въ горизонтальномъ положеніи. Круги K и M соседне-

ны между собою помощію, такъ называемаго, ставоваго винта Q , проходящаго чрезъ середину круга M , цилиндра C и закрѣпленнаго къ кругу K .

Фиг. 63.



Для сообщенія доскѣ P небольшого движенія около вертикальной оси служитъ микрометричный винтъ N ; если будемъ вращать этотъ винтъ, то доска P будетъ медленно двигаться въ ту или другую сторону.

Кромѣ описанной нами мензулы есть еще другія, хотя основанія для ихъ устройства одни и тѣ-же.

Принадлежности мензулы суть: уровень, алидада, мензульная буссоль и вилка съ отвѣсомъ.

1) *Уровень.* Для приведенія инструмента въ горизонтальное положеніе служатъ уровень, устройство котораго слѣдующее: къ линейкѣ M при-

Фиг. 65.



продолговатый разрывъ. Внутри этого цилиндра вложена стеклянная трубка, имѣющая сверху правильную кривизну, получающуюся отъ вращенія дуги большаго радіуса около своей хорды, которая называется *осью уровня*; въ эту стеклянную трубку вливаютъ винный спиртъ или сѣрный эфиръ; трубку сначала нагреваютъ, а затѣмъ охлаждаютъ, чрезъ что въ ней образуется небольшое безвоздушное пространство, наполненное парами жидкости; эти пары легче самой жидкости и потому безвоздушный пузырекъ будетъ сверху жидкости и будетъ занимать высшее мѣсто сосуда. На самой трубкѣ, въ той части, которая видна, дѣлаютъ разрывки, начиная отъ середины трубочки, гдѣ поставленъ нуль, въ обѣ стороны. Вѣрный уровень называется такой, въ которомъ ось параллельна нижней плоскости линейки.

Чтобы привести мензурную доску въ горизонтальное положеніе, ставятъ на ее уровень, по направленію двухъ подъемныхъ винтовъ, и помощью ихъ поднимаютъ или опускаютъ конецъ доски до тѣхъ поръ, пока середина пузырька не совпадетъ съ нулевымъ дѣленіемъ; потомъ этотъ уровень кладутъ на доскѣ въ другомъ направленіи, приблизительно перпендикулярномъ первому и опять поднимаютъ или опускаютъ конецъ доски, пока доска не приметъ горизонтальнаго положенія. Когда это будетъ выполнено, то доска приметъ горизонтальное положеніе, что необходимо при съемкѣ.

Фиг. 66.



2) *Алидада*. Она служитъ для навесенія на планѣ горизонтальнаго положенія прямой или, какъ говорятъ, для *визированія*. Алидада

состоитъ изъ мѣдной линейки, длиною отъ 18 до 24 дюймовъ и шириною въ $1\frac{1}{2}$ дюйма, на концахъ которой прикрѣплены діоптры, такъ, чтобы узкіе въ нихъ прорѣзы, волоски въ четырехъ угольныхъ прорѣзахъ и скошенный край линейки лежали бы въ одной плоскости (коллимационной), перпендикулярной къ нижней плоскости линейки. Для визированія на дальніе предметы употребляется алидада съ зрительною трубою, называемая *кирпелемъ*.

3) *Мензурная буссоль* (фиг. 67). Она состоитъ изъ цилиндриче-

ской коробки, діаметра около 4 дюймовъ, а вышиною около $\frac{1}{2}$ дюйма. На днѣ коробки прикрѣплено висеребряное кольцо съ градуснымъ дѣленіемъ отъ 0° до 360° , а въ центрѣ дна коробки утверждена шпиль, на которомъ вращается магнитная стрѣлка. Буссоль закрыта крышкой со стекломъ.

Фиг. 67.

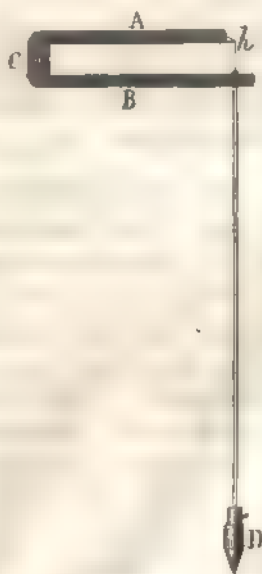


Для коробки выходитъ въ одну сторону и оканчивается прямою *AB*, параллельною тому діаметру, кот. проходитъ чрезъ 0° и 180° . Чтобы магнитная стрѣлка не была въ движеніи, имѣется пластинка *d* и *d'*: если прижмемъ ея конецъ къ выступу дна коробки, то другой конецъ поднимется и прижметъ стрѣлку къ стеклу.

Фиг. 68.

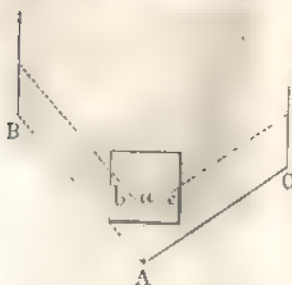
Мензуральная буссоль употребляется для приведенія мензуральной доски въ такое положеніе, при которомъ означенное на бумагѣ направленіе магнитнаго или географическаго меридіана совпадаетъ дѣйствительно съ плоскостью этого меридіана. Кроме того, эта буссоль можетъ служить для опредѣленія азимутовъ лѣній визированія.

4) Мензуральная вилка (фиг. 68). Она служитъ для установки мензулы такъ, чтобы точка, данная на доскѣ, была бы расположена отвѣсно надъ соотвѣтствующею точкою мѣстности. Мензуральная вилка состоитъ изъ двухъ, соединенныхъ между собою брусковъ *A* и *B*, изъ которыхъ верхній бороче пнявно и оканчивается остриемъ *h*, а нижній длиннѣе верхняго и имѣетъ отверстіе противъ *h* конца верхняго бруска. Въ это отверстіе продѣта вить, на концѣ которой прикрѣпленъ грузъ *D*.



Нанесеніе на планъ прямыхъ линій и угловъ помощію мензулы.

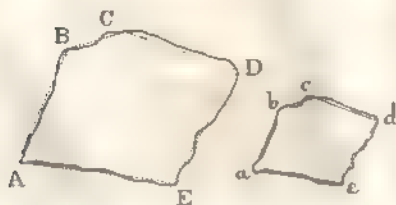
Положимъ требуется нанести на планъ прямыя AB и AC , т. е. уголъ BAC . Для этого ставимъ штативъ мензулы въ точку A и на него накладываемъ мензульную доску, кот. прикрѣпляемъ скобами m и n къ доскѣ P штатива; ослабивъ становой винтъ, приводимъ мензульную доску въ горизонтальное положеніе помощью уровня, какъ было уже сказано; потомъ закрѣпляемъ становой винтъ и помощью вилки находимъ на доскѣ положеніе точки a , лежащей на одной вертикальной линіи съ точкою A . После этого, кладемъ на доску алидаду такъ, чтобы точка a находилась при скошенномъ краѣ алидады и, смотря въ узкое отверстіе діоптра, поворачиваемъ ее на столько, чтобы волосокъ противоположнаго діоптра покрылъ бы B ; тогда, придерживая алидаду, проведемъ карандашомъ подлѣ бока алидады (гдѣ точка a) и получимъ линію ab , которая будетъ горизонтальнымъ проложеніемъ линіи AB . Такимъ же точно образомъ нанесемъ на планъ горизонтальное проложеніе линіи AC и получимъ $\angle bac = \angle BAC$.



Краткое понятіе о составленіи плана мѣстности.

§ 146. Чтобы нанести на планъ контуръ мѣстности $ABCDE$ (фиг. 70), беремъ нѣсколько точекъ A, B, C, D и E на контурѣ и при томъ такъ, чтобы линіи AB, BC, \dots ближе подходили къ кривымъ AB, BC, \dots , ограничивающимъ эту мѣстность. Затѣмъ, если производимъ съемку буссолью или астралабіей, то измѣряемъ длины линій AB, BC, CD, \dots и углы при точкахъ A, B, C, \dots ; потомъ, на бумагѣ, составляемъ масштабъ для линій AB, BC, \dots и строимъ многоугольникъ $abcde$, подобный данному, откладывая стороны по этому масштабу, а углы по транспорту. Проведя на глазъ между вершинами многоугольника линіи, сходныя съ тѣми, которыя на мѣстности, получимъ планъ мѣстности $ABCDE$.

Фиг. 70.



Если же производимъ съемку помощью мензулы, то, поставивъ ее въ точку *A*, наносимъ на планъ горизонтальныя проложенія линий *AB*, *AC*, *AD* и *AE*; потомъ измѣряемъ длину линии *AB* (базиса) и откладываемъ ее по масштабу на горизонтальномъ проложеніи линіи *AB* отъ точки *a* и получаемъ часть *ab*, равную по масштабу линіи *AB*. Переходимъ съ мензулою въ точку *B* и ставимъ ее такъ, чтобы точки *b* и *B* были бы въ одной вертикальной линіи, а линіи *ba* и *BA* находились бы въ одной вертикальной плоскости. При точкѣ *B* наносимъ также горизонтальныя проложенія линіи *BC*, *BD*, *BE* и получаемъ въ пересѣченіи ихъ съ первыми прямыми точки *c*, *d* и *e*. Соединивъ точку *a* съ *c*, *c* съ *d*, *d* съ *e* и *e* съ *b*, получимъ горизонтальныя проложенія сторонъ многоугольника *ABCDE*.

Фиг. 71.

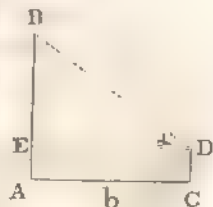


РѢШЕНІЕ НѢКОТОРЫХЪ ЗАДАЧЪ НА МѢСТНОСТИ.

§ 147. Задача I. *Опредѣлить высоту доступнаго предмета, стоящаго на горизонтальной плоскости.*

Положимъ, требуется опредѣлить высоту предмета *AB*. Для этого, поставивъ угломерный инструментъ въ точку *C*, измѣримъ уголъ α , составляемый прямою *BD* съ горизонтальною прямою; также измѣримъ разстояніе *AC*, которое означимъ буквою *b*. Тогда, изъ прямоугольнаго треугольника *BDE*, получимъ:

Фиг. 72.



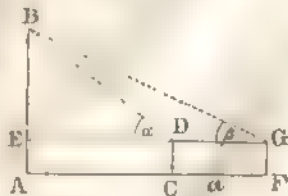
$$BE = DE \cdot \operatorname{tg} \alpha \text{ или } BE = b \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Придавъ къ *BE* высоту угломернаго снаряда, т. е. $CD = AE$, получимъ искомую высоту *AB*.

Фиг. 73.

§ 148. Задача II. *Опредѣлить высоту недоступнаго предмета, зная, что основаніе предмета и мѣсто наблюдателя находятся въ одной горизонтальной плоскости.*

Положимъ, требуется опредѣлить высоту предмета *AB*, къ которому по-



дойти нельзя. Поставив угломерный инструментъ въ точку D , измѣряемъ уголъ $BDE = \alpha$; затѣмъ, въ томъ-же направленіи, возьмемъ еще точку F и, поставивъ здѣсь инструментъ измѣряемъ уголъ $BGE = \beta$; также опредѣлимъ длину $CF = a$. Тогда изъ треугольника BDG , гдѣ $DG = a$, $BGD = \beta$ и $BDG = 180^\circ - \alpha$, найдемъ длину BD (§ 130):

$$\frac{BD}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin (\alpha - \beta)} \quad \text{или} \quad BD = \frac{a \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)};$$

изъ прямоугольнаго-же треугольника BDE получимъ:

$$BE = BD \sin \alpha = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}.$$

Придавъ къ BE высоту угломернаго инструмента, т. е. $CD = AE$, получимъ искомую высоту AB .

§ 149. Задача III. *Опредѣлить разстояніе между двумя предметами, когда нельзя измѣрить непосредственно разстояніе между ними.*

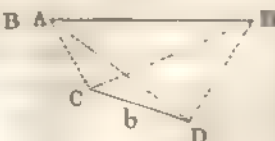
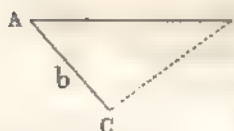
Здѣсь могутъ быть два случая:

1) Одинъ изъ предметовъ видимъ, но недоступенъ.

Положимъ, что требуется опредѣлить разстояніе между предметами A и B , и къ B

Фиг. 74.

Фиг. 75.



(фиг. 74) подойти нельзя. Тогда сами выбираемъ на мѣстности какую-либо точку C и измѣряемъ разстояніе

$AC = b$ и углы BAC и ACB . Изъ треугольника ABC найдемъ (§ 130):

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}; \quad \text{откуда} \quad AB = \frac{b \sin C}{\sin B}.$$

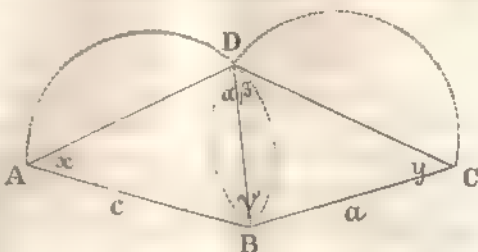
2) Оба предмета видны, но недоступны.

Пусть требуется опредѣлить разстояніе между предметами A и B (фиг. 75), которые видны, но недоступны. Возьмемъ двѣ произвольныя точки C и D и измѣримъ углы: ACB , BCD , BDA и ADC . Изъ треугольника BCD , гдѣ извѣстна сторона CD и два угла BCD и BDC , опредѣлимъ сторону BC (§ 130); изъ треугольника ACD , гдѣ извѣстна сторона CD , углы ACD и ADC , опре-

дѣлимъ сторону AC ; наконецъ, изъ треугольника ABC , въ которомъ извѣстны стороны AC и BC и уголъ ACB между ними, опредѣлимъ (§ 131) сторону AB . Для повѣрки стороны AB вычисляють ее изъ двухъ $\triangle ACB$ и ADB .

§ 150. Задача 4. По тремъ даннымъ точкамъ A , B и C , опредѣлить положеніе четвертой точки D , лежащей съ ними въ одной плоскости и изъ которой прямая AB и BC видны подъ данными углами α и β .

Фиг. 76.



Графически положеніе точки D опредѣлится пересѣченіемъ круговыхъ сегментовъ, вмѣщающихъ углы α и β и построенныхъ соответственно на AB и BC . Вычисленіемъ же, положеніе точки D будетъ вполне извѣстно, если найдемъ численныя величины AD и CD . Пусть $AB = c$, $BC = a$, $\angle ABC = \gamma$; также означимъ $\angle BAD$ буквою x и $\angle BCD$ буквою y . Сумма внутреннихъ угловъ четырехугольника равна четыремъ прямымъ, а потому

$$x + y + \alpha + \beta + \gamma = 360^\circ;$$

оттуда

$$x + y = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) \text{ или } \frac{1}{2}(x + y) = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}. \quad (1)$$

Изъ треугольниковъ ABD и BCD имѣемъ (§ 130):

$$\frac{BD}{c} = \frac{\sin x}{\sin \alpha} \text{ и } \frac{BD}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma};$$

перемноживъ почленно эти равенства, найдемъ:

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin x \sin \beta}{\sin \gamma \sin \alpha}; \text{ откуда } \frac{\sin x}{\sin \gamma} = \frac{a \sin \alpha}{c \sin \beta}.$$

Пусть $\frac{a \sin \alpha}{c \sin \beta} = \operatorname{tg} \varphi$; отсюда φ найдемъ по логарифмамъ и тогда

$$\frac{\sin x}{\sin \gamma} = \operatorname{tg} \varphi \text{ или } \frac{\sin x - \sin \gamma}{\sin x + \sin \gamma} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - 1}{\operatorname{tg} \varphi + 1} \quad (\S 51) = \operatorname{tg}(\varphi - 45^\circ)$$

или (§ 54)

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x - \gamma) = \operatorname{tg}(\varphi - 45^\circ), \text{ а } \operatorname{tg} \frac{1}{2}(x - \gamma) = \operatorname{tg}(\varphi - 45^\circ) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(x + \gamma).$$

Подставим сюда величину $\frac{1}{2}(x+y)$ и найдем равенство:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x-y) = \operatorname{tg}(\varphi - 45^\circ) \operatorname{tg}\left(180^\circ - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}\right); \quad (2)$$

из которого определим величину $\frac{1}{2}(x-y)$. Зная $\frac{1}{2}(x+y)$ и $\frac{1}{2}(x-y)$, найдем x и y , а затѣмъ уже изъ треугольниковъ ABD и BCD стороны AD и CD .

Замѣчаніе. Если одинъ изъ множителей во второй части (2) равенства будетъ нуль, а другой не равенъ безконечности, то $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x-y) = 0$ и слѣд. $x=y$; но, если второй множитель равенъ безконечности, то первый множитель равенъ нулю и вторая часть будетъ ∞ и величинъ x и y , удовлетворяющихъ этому равенству будетъ безчисленное множество, т. е. предложенный вопросъ при этихъ данныхъ неопредѣленный.

Дѣйствительно, изъ условія

$$\operatorname{tg}\left(180^\circ - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}\right) = \infty \text{ выходить, что } \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$$

или

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ;$$

это показываетъ, что фигура $ABCD$ вписуема въ кругъ, а потому сегменты, вмѣщающіе углы α и β и которые пересѣченіемъ опредѣляли точку D , сливаются. Изъ условія $\frac{a \sin \alpha}{c \sin \beta} = \operatorname{tg} \varphi$, выходить, что $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{\sin \beta} : \frac{c}{\sin \alpha}$; но $\frac{a}{\sin \beta}$ и $\frac{c}{\sin \alpha}$ суть діаметры круговъ, описанныхъ около треугольниковъ ABD и BCD ; а такъ какъ эти круги совпали, то діаметры ихъ равны и $\operatorname{tg} \varphi = 1$ или $\varphi = 45^\circ$, а потому $\operatorname{tg}(\varphi - 45^\circ) = 0$.

§ 151. При измѣреніи угловъ посредствомъ инструмента, а также и при измѣреніи длинъ прямыхъ, получаемъ неточную ихъ величину; эта неточность оказываетъ также вліяніе на опредѣляемая (посредствомъ вычисленія) искомыя части треугольника. Въ некоторыхъ случаяхъ, легко найти предѣлъ погрѣшности въ искомыхъ частяхъ въ зависимости отъ погрѣшности измѣренія длинъ и угловъ; въ другихъ-же случаяхъ, требуется знаніе дифференціальнаго исчисленія. Напр. въ задачѣ § 147 найди, что

$$x = b \operatorname{tg} \alpha, \quad (1)$$

гдѣ x означаетъ длину BE (чер. 72). Положимъ, что истинная величина

*) Эта задача наз. *Потемкиною*, потому что Потемкинъ предложилъ полное ея рѣшеніе въ 1692 г.

BE есть $x + \epsilon$, а угла BDE есть $\alpha + \mu$; тогда изъ треугольника BDE имѣемъ:

$$x + \epsilon = b \operatorname{tg}(\alpha + \mu). \quad (2)$$

Вычтя почленно (1) равенство изъ (2), найдемъ:

$$\epsilon = b [\operatorname{tg}(\alpha + \mu) - \operatorname{tg} \alpha] = \frac{b \sin \mu}{\cos(\alpha + \mu) \cos \alpha},$$

но для угловъ, меньшихъ прямого, $\sin \mu < \mu$, а $\cos(\alpha + \mu) < \cos \alpha$ и потому

$$\epsilon < \frac{b \mu}{\cos^2 \alpha}.$$

Изъ этого неравенства опредѣляется предѣлъ погрѣшности при нахожденіи величины BE , въ зависимости отъ погрѣшности опредѣленія угла α .

Отношеніе-же погрѣшности, при опредѣленіи BE , къ найденной длинѣ BE , будетъ:

$$\frac{\epsilon}{x} < \frac{b \mu}{\cos^2 \alpha} : b \operatorname{tg} \alpha \text{ или } \frac{\epsilon}{x} < \frac{2 \mu}{\sin 2 \alpha}.$$

ОТДѢЛЪ XI.

Опредѣленіе площадей прямолинейныхъ фигуръ. — Опредѣленіе радиуса круга, вписаннаго и описаннаго около правильнаго многоугольника.

§ 152. Задача I. *Опредѣлить площадь треугольника по двум сторонамъ и углу между ними.*

Изъ вершины A въ треугольникѣ ABC (черт. 77) опустимъ перпендикуляръ AD на основаніе BC или продолженіе основанія BC (чер. 78); тогда, означивъ площадь треугольника буквою S , найдемъ:

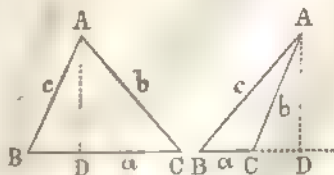
$$S = \frac{1}{2} a \cdot AD;$$

но, изъ прямоугольнаго треугольника ABD : $AD = c \sin B$, а потому

$$S = \frac{1}{2} ac \sin B,$$

Фиг. 77.

Фиг. 78.



т. е. площадь треугольника равна половине произведения его стороны, умноженной на синус угла между ними.

§ 153. Задача II. *Определить площадь треугольника по стороне и двум прилежащим углам.*

Въ предыдущемъ параграфѣ нашли

$$S = \frac{1}{2} ac \sin B;$$

но (§ 117)

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}; \text{ откуда } c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Слѣдовательно:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a \sin C}{\sin A} \cdot \sin B = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A};$$

а такъ какъ $A = 180^\circ - (B + C)$, то поэтому

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin (B + C)}.$$

§ 154. Задача III. *Определить площадь треугольника по двум сторонамъ и углу, противолежащему одной изъ нихъ.*

Опредѣлимъ сначала въ треугольникѣ уголъ, противолежащій другой данной сторонѣ треугольника (§ 137), а потомъ и площадь треугольника по формулѣ § 152.

§ 155. Задача IV. *Определить площадь треугольника по тремъ его сторонамъ.*

Въ § 152 нашли, что $S = \frac{1}{2} ac \sin B$; но (§ 55) $\sin B = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$

и потому $S = ac \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$. Въ § 120 имѣли, что

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}, \text{ а } \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$

и слѣдовательно:

$$S = ac \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \cdot \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$

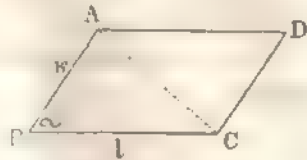
или

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

§ 156. Задача V. *Определить площадь параллелограмма по двум сторонамъ и углу между ними.*

Въ параллелограммѣ $ABCD$ дана сторона $AB = k$, сторона $BC = l$ и уголъ B . Соединивъ прямою точки A и C , найдемъ, что площадь треугольника $ABC = \frac{1}{2} kl \sin B$, а площадь параллелограмма $ABCD = 2 \cdot ABC = 2 \cdot \frac{1}{2} kl \sin B = kl \sin B$, т. е. площадь параллелограмма равна произведению двухъ смежныхъ его сторонъ на синусъ угла между ними.

Фиг. 79.

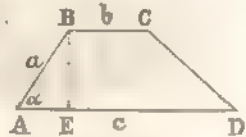


§ 157. Задача VI. Найти площадь трапеции по двумъ основаниямъ, одной изъ непараллельныхъ сторонъ и углу, прилежащему къ ней.

Въ трапеціи $ABCD$ дано: $AB = a$, $BC = b$, $AD = c$ и $\angle BAD = \alpha$.

Фиг. 80.

Тогда, опустивъ изъ точки B перпендикуляръ BE на AD , найдемъ, что площадь трапеціи



$$ABCD = \frac{1}{2} (b + c) \cdot BE;$$

но, изъ прямоугольнаго треугольника ABE , видимъ, что $BE = a \sin \alpha$, а потому площадь трапеціи

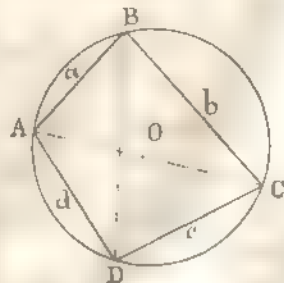
$$ABCD = \frac{1}{2} (b + c) a \sin \alpha.$$

§ 158. Задача VII. По даннымъ сторонамъ четырехугольника, вписаннаго въ кругъ, опредѣлить диагонали, углы и площадь этого четырехугольника.

Въ четырехугольникѣ $ABCD$, вписанномъ въ кругъ, дано: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $DA = d$. Проведемъ діагональ AC ; тогда площадь четырехугольника, хот. означимъ буквою S , будетъ равна суммѣ площадей треугольниковъ ABC и ADC ; слѣдовательно (§ 152)

Фиг. 81

$S = ABC + ADC = \frac{1}{2} ab \sin B + \frac{1}{2} cd \sin D$. Сумма угловъ B и D равна двумъ прямымъ, а потому $\sin D = \sin B$, а $\cos D = -\cos B$ и



$$S = \frac{1}{2} ab \sin B + \frac{1}{2} cd \sin B = \frac{1}{2} (ab + cd) \sin B.$$

Изъ треугольника ABC имѣемъ (§ 118):

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2 ab \cos B,$$

а изъ треугольника ADC :

$$AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos D \text{ или } AC^2 = c^2 + d^2 + 2cd \cos B;$$

слѣдовательно

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos B = c^2 + d^2 + 2cd \cos B;$$

откуда

$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

Также найдемъ, что

$$\begin{aligned} \sin^2 B &= 1 - \cos^2 B = 1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4(ab + cd)^2} = \\ &= \frac{4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4(ab + cd)^2} = \\ &= \frac{[2(ab + cd) + a^2 + b^2 - c^2 - d^2][2(ab + cd) - a^2 - b^2 + c^2 + d^2]}{4(ab + cd)^2} = \\ &= \frac{[(a+b)^2 - (c-d)^2][(c+d)^2 - (a-b)^2]}{4(ab + cd)^2} = \\ &= \frac{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b)}{4(ab + cd)^2}. \end{aligned}$$

Положимъ $a + b + c + d = 2p$; тогда $a + b + c - d = 2(p - d)$,
 $a + b - c + d = 2(p - c)$ и т. д.; слѣдовательно

$$\sin^2 B = \frac{16(p-d)(p-c)(p-b)(p-a)}{4(ab + cd)^2}$$

или

$$\sin B = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab + cd};$$

но мы видѣли, что $S = \frac{1}{2}(ab + cd) \sin B$ и потому

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Легко также опредѣлять длину діагонали AC . Подставивъ въ равенство:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B$$

вмѣсто $\cos B$ его величину, найдемъ:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - \frac{ab(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{ab + cd} = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}.$$

Точно также найдемъ, что

$$BD^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc};$$

слѣдовательно:

$$AC^2 \cdot BD^2 = (ac + bd)^2 \text{ или } AC \cdot BD = ac + bd,$$

т. е. во всякомъ четырехугольникѣ, вписанномъ въ кругъ, произведеніе діагоналей равно суммѣ произведеній противоположащихъ сторонъ.

§ 159. Задача VIII. Определить площадь правильного многоугольника по его сторонѣ, а также по радиусу круга, вписаннаго въ него или описаннаго около него. Также, по одной сторонѣ правильного многоугольника, определить радиусъ круга, вписаннаго или описаннаго около этого многоугольника.

Пусть AB будетъ сторона правильного многоугольника, имѣющаго n сторонъ; O центръ вписаннаго или описаннаго круга около даннаго многоугольника. Означимъ сторону AB буквою a , радиусъ вписаннаго круга буквою r и радиусъ описаннаго круга буквою R . Уголъ AOB составляетъ n -ую часть четырехъ прямыхъ угловъ и потому

$$\angle AOB = \frac{2\pi}{n}, \text{ а } \angle AOD = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{\pi}{n}.$$

Изъ прямоугольнаго треуг. AOD получимъ:

$$OD = AD \operatorname{ctg} AOD \text{ или } r = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \quad (1)$$

$$\text{и } AO = AD : \sin AOD \text{ или } R = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n}}. \quad (2)$$

Площадь треугольника

$$\triangle AOB = \frac{1}{2} AB \cdot OD = \frac{1}{2} ar = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} = \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n},$$

слѣдовательно, площадь даннаго многоугольника, которую означимъ буквою s , будетъ равна n площадямъ треугольника AOB или

$$s = \frac{na^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}. \quad (3)$$

Можно дать выраженіе для площади многоугольника въ зависимости отъ r и R . Изъ (1) и (2) равенствъ имѣемъ:

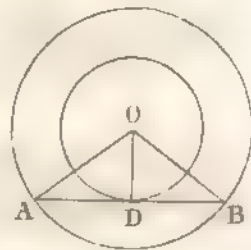
$$a = 2r \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \text{ и } a = 2R \sin \frac{\pi}{n};$$

подставивъ эти величины въ (3) равенство, найдемъ:

$$s = nr^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} = nr^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

$$\text{и } s = nR^2 \sin^2 \frac{\pi}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} = nR^2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} = \frac{nR^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n}.$$

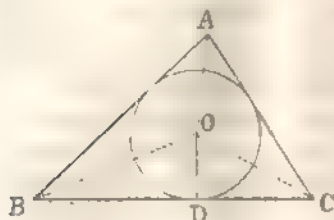
Фиг. 82.



§ 160. Задача IX. *Определить радиус круга, описанного в треугольнике, по сторонам и углам треугольника.*

Пусть O означает центр круга, вписанного в треугольник ABC ; тогда OA , OB и OC будут соответственно равноудалены от углов A ,

Фиг. 83.



B и C , а перпендикуляр OD , опущенный из точки O на сторону BC , будет радиусом вписанного круга. Означим сторону BC буквою a , а OD буквою r ; тогда из прямоугольных треугольников BOD и COD получим (§ 116):

$$BD = r \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \quad \text{и} \quad CD = r \operatorname{ctg} \frac{C}{2};$$

следовательно

$$a = BD + DC = r \left(\operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right) = \frac{r \sin \frac{B+C}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

но $B + C = 180^\circ - A$, а потому

$$a = \frac{r \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}; \quad \text{откуда} \quad r = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}.$$

Если вместо $\sin \frac{B}{2}$, $\sin \frac{C}{2}$ и $\cos \frac{A}{2}$ подставим их величины (§ 120),

найденные в зависимости от сторон a , b и c данного треугольника, то получим:

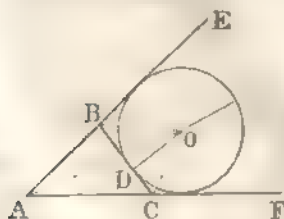
$$r = \frac{s}{p},$$

где s означает площадь, а p — полупериметр данного треугольника.

§ 161. Задача X. *Определить радиус вписанного круга*) в треугольнике по сторонам и углам треугольника.*

Пусть O означает центр вписанного круга, касающегося стороны BC и продолжений сторон AB и AC ;

Фиг. 84.



тогда, прямые OA , OB и OC будут соответственно равноудалены от углов A , EBC и FCB , а перпендикуляр OD , опущенный из точки O на сторону BC , будет радиусом круга. Означим сторону BC буквою a , а OD — буквою r_a ; из прямоугольных треугольников BOD и COD получим:

*) Вписанным кругом в треугольнике называется такой круг, который касается стороны треугольника и продолжений двух других сторон.

$$BD = r_a \operatorname{ctg} \frac{1}{2} B, \quad DC = r_a \operatorname{ctg} \frac{1}{2} C, \quad (180^\circ - B) = r_a \operatorname{tg} \frac{B}{2}$$

и $DC = r_a \operatorname{ctg} \frac{1}{2} C, \quad FC = r_a \operatorname{ctg} \frac{1}{2} C, \quad (180^\circ - C) = r_a \operatorname{tg} \frac{C}{2};$

но $a = BD + DC$, а потому

$$a = r_a \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right) = \frac{r_a \sin \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

Такъ какъ $B + C = 180^\circ - A$, то поэтому

$$a = \frac{r_a \cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}; \quad \text{откуда } r_a = \frac{a \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

Если $\cos \frac{A}{2}$, $\cos \frac{B}{2}$ и $\cos \frac{C}{2}$ замѣнимъ ихъ величинами въ зависимости

отъ сторонъ a , b и c даннаго треугольника (§ 120), то получимъ:

$$r_a = \frac{s}{p-a},$$

гдѣ p означаетъ периметръ, а s — площадь даннаго треугольника.

§ 162. Задача XI. *Опредѣлить радиусъ круга, описаннаго около треугольника, а которомъ даны три его стороны.*

Пусть точка O будетъ центръ круга, описаннаго около треугольника ABC ;

тогда $OA = OB = OC$. Изъ точки O опустимъ перпендикуляръ OD на BC , кот. пройдетъ чрезъ D середину стороны BC ; означимъ радиусъ описаннаго круга буквою R , а сторону BC — буквою a . Уголъ $BOC = 2 \angle BAC$, а потому уголъ $BOD = \angle BAC$ или $BOD = A$; слѣдовательно, изъ прямоугольнаго треугольн. BOD , получимъ:

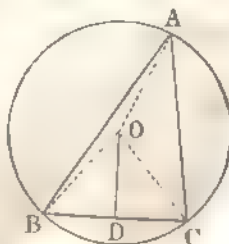
$$BD = BO \cdot \sin BOD$$

или $\frac{a}{2} = R \sin A$; откуда $R = \frac{a}{2 \sin A}$.

Означимъ сторону AB буквою c , а сторону AC буквою b и площадь треугольника ABC буквою s ; получимъ (§ 152):

$$s = \frac{bc \sin A}{2}; \quad \text{откуда } \sin A = \frac{2s}{bc} \quad \text{и слѣд. } R = \frac{abc}{4s}.$$

Фиг. 85.



ОТДѢЛЪ XII.

Введеніе тригонометрическихъ величинъ въ мнимыя выраженія. — Умноженіе и дѣленіе мнимыхъ выраженій. — Теорема Муавра — Разложеніе синуса, косинуса и тангенса въ ряды. — Рѣшеніе двучленныхъ уравненій. — Суммирование нѣкоторыхъ тригонометрическихъ рядовъ.

§ 163. Введеніе тригонометрическихъ величинъ въ мнимыя выраженія. Общій видъ мнимаго выраженія есть:

$$a + b\sqrt{-1}, \dots \dots \dots (1)$$

гдѣ a и b дѣйствительныя числа.

Этому выраженію можно дать другой видъ, положивъ:

$$a = \rho \cos \varphi \dots \dots (2) \text{ и } b = \rho \sin \varphi; \dots \dots (3)$$

такія положенія возможны, потому что всегда можно найти для ρ положительную величину, а для угла φ величину, меньшую 2π , которыя удовлетворяли бы (2) и (3) равенствамъ.

Въ самомъ дѣлѣ, возведя въ квадратъ (2) и (3) равенства и сложивъ почленно получимъ:

$$a^2 + b^2 = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \text{ или } a^2 + b^2 = \rho^2;$$

откуда

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}; \dots \dots \dots (4)$$

раздѣливъ же почленно (3) равенство на (2), найдемъ:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \dots \dots \dots (5)$$

Изъ равенствъ (4) и (5) можно будетъ опредѣлить величины ρ и φ

Выраженіе (1) при $a = \rho \cos \varphi$ и $b = \rho \sin \varphi$ приметъ видъ:

$$\rho (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi),$$

гдѣ ρ положительное число, а $\varphi < 2\pi$. Число ρ наз. *модулемъ*, а уголъ φ *аргументомъ* этого мнимаго выраженія.

§ 164. Умноженіе и дѣленіе мнимыхъ выраженій. (ако умножить два выраженія:

$$\rho (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) \text{ и } \rho' (\cos \varphi' + \sqrt{-1} \sin \varphi');$$

проведемъ умноженіе по правилу умноженія многочленовъ и замѣтивъ, что $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$, найдемъ:

$$\begin{aligned} & \rho\rho' (\cos \varphi \cos \varphi' + \sqrt{-1} \sin \varphi \cos \varphi' + \sqrt{-1} \cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \sin \varphi') \\ & - \rho\rho' [\cos \varphi \cos \varphi' - \sin \varphi \sin \varphi' + \sqrt{-1} (\sin \varphi \cos \varphi' + \cos \varphi \sin \varphi')] \\ & = \rho\rho' [\cos (\varphi + \varphi') + \sqrt{-1} \sin (\varphi + \varphi')]; \end{aligned}$$

откуда слѣдуетъ правило: чтобы умножить одно мнимое выраженіе на другое, надо перемножить ихъ модули и сложить аргументы.

Предъидущее правило очевидно справедливо, когда множителей и болѣе двухъ. Для примѣра, найдемъ произведеніе трехъ мнимыхъ выраженій:

$$\rho (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi), \rho' (\cos \varphi' + \sqrt{-1} \sin \varphi') \text{ и } \rho'' (\cos \varphi'' + \sqrt{-1} \sin \varphi'').$$

Перемноживъ первыя два выраженія найдемъ:

$$\rho\rho' [\cos (\varphi + \varphi') + \sqrt{-1} \sin (\varphi + \varphi')];$$

поввоживъ-же это выраженіе на $\rho'' (\cos \varphi'' + \sqrt{-1} \sin \varphi'')$, найдемъ, по предъидущему правилу:

$$\rho\rho'\rho'' [\cos (\varphi + \varphi' + \varphi'') + \sqrt{-1} \sin (\varphi + \varphi' + \varphi'')].$$

§ 165. Положимъ даво раздѣлить выраженіе $\rho (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)$ на $\rho' (\cos \varphi' + \sqrt{-1} \sin \varphi')$; получимъ:

$$\rho (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)$$

$$\rho' (\cos \varphi' + \sqrt{-1} \sin \varphi')$$

Умноживъ числителя и знаменателя дроби на $\cos \varphi' - \sqrt{-1} \sin \varphi'$, найдемъ:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) (\cos \varphi' - \sqrt{-1} \sin \varphi')}{\rho' (\cos^2 \varphi' + \sin^2 \varphi')} = \\ & = \frac{\rho}{\rho'} [\cos (\varphi - \varphi') + \sqrt{-1} \sin (\varphi - \varphi')]. \end{aligned}$$

Слѣдовательно, чтобы раздѣлить одно мнимое выраженіе на другое, надо модуль дѣлимаго раздѣлить на модуль дѣлителя, а изъ аргумента дѣлимаго вычесть аргументъ дѣлителя.

§ 166. Теорема Муавра. Для всякаго n цѣлаго или дробнаго, положительнаго или отрицательнаго, $\cos n \mathcal{Z} + \sqrt{-1} \sin n \mathcal{Z}$ будетъ одна изъ величинъ выраженія $(\cos \mathcal{Z} + \sqrt{-1} \sin \mathcal{Z})^n$.

Эту теорему разсмотримъ послѣдовательно: 1) для n цѣлаго и положительнаго; 2) для n цѣлаго и отрицательнаго и 3) для n дробнаго.

1) n цѣловъ и положительное число. Тогда

$$\begin{aligned} & (\cos \mathcal{Z} + \sqrt{-1} \sin \mathcal{Z})^n = (\cos \mathcal{Z} + \sqrt{-1} \sin \mathcal{Z}) (\cos \mathcal{Z} + \sqrt{-1} \sin \mathcal{Z}) \dots \\ & \dots (\cos \mathcal{Z} + \sqrt{-1} \sin \mathcal{Z}) \text{ (} n \text{ разъ)} \end{aligned}$$

или (§ 164)

$$\begin{aligned} & (\cos \mathcal{Z} + \sqrt{-1} \sin \mathcal{Z})^n = \cos (\mathcal{Z} + \mathcal{Z} + \dots) + \sqrt{-1} \sin (\mathcal{Z} + \mathcal{Z} + \dots) \\ & = \cos n \mathcal{Z} + \sqrt{-1} \sin n \mathcal{Z}. \end{aligned}$$

2) n целое и отрицательное число. Положим $n = -m$; тогда

$$\begin{aligned} (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^n &= (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^{-m} = \\ &= \frac{1}{(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^m} = \frac{1}{(\cos m\vartheta + \sqrt{-1} \sin m\vartheta)}; \end{aligned}$$

умноживь числителя и знаменателя дроби на $\cos m\vartheta - \sqrt{-1} \sin m\vartheta$, найд.

$$(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^{-m} = \frac{\cos m\vartheta - \sqrt{-1} \sin m\vartheta}{\cos^2 m\vartheta + \sin^2 m\vartheta} = \frac{\cos m\vartheta - \sqrt{-1} \sin m\vartheta}{1},$$

потому что $\cos^2 m\vartheta + \sin^2 m\vartheta = 1$.

Выражение же $\cos m\vartheta - \sqrt{-1} \sin m\vartheta$ может быть написано такъ (§ 30): $\cos(-m\vartheta) + \sqrt{-1} \sin(-m\vartheta)$ и потому

$$(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^{-m} = \cos(-m\vartheta) + \sqrt{-1} \sin(-m\vartheta)$$

или, подставивъ n вместо $-m$, найдемъ:

$$(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^n = \cos n\vartheta + \sqrt{-1} \sin n\vartheta.$$

Извлекая корень n -ой степени изъ обѣихъ частей равенства $(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^n = \cos n\vartheta + \sqrt{-1} \sin n\vartheta$, получимъ, что $\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta$

есть одна изъ величинъ $\sqrt[n]{\cos n\vartheta + \sqrt{-1} \sin n\vartheta}$, гдѣ n цѣлое число; слѣд.

$$(\cos n\vartheta + \sqrt{-1} \sin n\vartheta)^{\frac{1}{n}} = \cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta,$$

гдѣ аргументъ ϑ очевидно равенъ аргументу $n\vartheta$, умноженному на $\frac{1}{n}$.

3) n дробное число. Положимъ $n = \frac{p}{q}$, гдѣ p и q цѣлыя числа; тогда

$$\begin{aligned} (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^n &= (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^{\frac{p}{q}} = [(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^p]^{\frac{1}{q}} = \\ &= (\cos p\vartheta + \sqrt{-1} \sin p\vartheta)^{\frac{1}{q}} = \cos \frac{p\vartheta}{q} + \sqrt{-1} \sin \frac{p\vartheta}{q}; \end{aligned}$$

но $\frac{p\vartheta}{q} = n\vartheta$, а потому

$$(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^n = \cos n\vartheta + \sqrt{-1} \sin n\vartheta.$$

§ 167. Мы видѣли, что при n дробномъ, $\cos n\vartheta + \sqrt{-1} \sin n\vartheta$ есть одна изъ величинъ $(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^n$. Теперь покажемъ, какъ опредѣлить всѣ величины $(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^n$, гдѣ n дробное число, равное $\frac{p}{q}$, гдѣ p и q цѣлыя числа.

Величины $\sin \vartheta$ и $\cos \vartheta$ будутъ одинаковы, если круговую мѣру ϑ увеличимъ на $2\pi r$, гдѣ r цѣлое число, т. е. $\cos \vartheta = \cos(\vartheta + 2\pi r)$ и $\sin \vartheta = \sin(\vartheta + 2\pi r)$; слѣдовательно

$$\begin{aligned} (\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^{\frac{p}{q}} &= [\cos(\vartheta + 2\pi r) + \sqrt{-1} \sin(\vartheta + 2\pi r)]^{\frac{p}{q}} \\ &= \cos \frac{p(\vartheta + 2\pi r)}{q} + \sqrt{-1} \sin \frac{p(\vartheta + 2\pi r)}{q}. \end{aligned}$$

Полагая $r = 0, 1, 2, \dots$, увидимъ, что первая часть этого равенства будетъ безъ переменныя, а вторая будетъ имѣть только q различныхъ значений, получаемыхъ отъ первыхъ q значений числа r , т. е. для $r = 0, 1, 2, 3, \dots$ и $q - 1$; потому что, если дадимъ r , значение большее $q - 1$, то выражение $\cos \frac{p(\mathcal{S} + 2\pi r)}{q} + \sqrt{-1} \sin \frac{p(\mathcal{S} + 2\pi r)}{q}$ приведетъ къ такому, гдѣ $r < q - 1$. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ $r = mq + s$, гдѣ m и s числа цѣлыя и $s < q$; тогда

$$\cos \frac{p(\mathcal{S} + 2\pi r)}{q} = \cos \left[\frac{p}{q} (\mathcal{S} + 2s\pi) + 2m\pi \right] = \cos \frac{p}{q} (\mathcal{S} + 2s\pi), \text{ гдѣ } s < q,$$

$$\text{и } \sin \frac{p(\mathcal{S} + 2\pi r)}{q} = \sin \left[\frac{p}{q} (\mathcal{S} + 2s\pi) + 2m\pi \right] = \sin \frac{p}{q} (\mathcal{S} + 2s\pi), \text{ гдѣ } s < q.$$

Слѣдовательно всѣ значения для $(\cos \mathcal{S} + \sqrt{-1} \sin \mathcal{S})^p$ будутъ.

$$\cos \frac{p\mathcal{S}}{q} + \sqrt{-1} \sin \frac{p\mathcal{S}}{q}, \cos \frac{p(\mathcal{S} + 2\pi)}{q} + \sqrt{-1} \sin \frac{p(\mathcal{S} + 2\pi)}{q},$$

$$\cos \frac{p(\mathcal{S} + 4\pi)}{q} + \sqrt{-1} \sin \frac{p(\mathcal{S} + 4\pi)}{q}, \dots \text{ и}$$

$$\cos \frac{p[\mathcal{S} + 2(q-1)\pi]}{q} + \sqrt{-1} \sin \frac{p[\mathcal{S} + 2(q-1)\pi]}{q}.$$

Слѣствие I. Положивъ $\mathcal{S} = 0$ и $p = 1$, найдемъ, что $(\cos 0 + \sqrt{-1} \sin 0)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{1}$ имѣетъ q различныхъ значений, заключающихся въ формулѣ:

$$\cos \frac{2r\pi}{q} + \sqrt{-1} \sin \frac{2r\pi}{q},$$

гдѣ r можно давать значения: $0, 1, 2, \dots$ и $q - 1$.

Эту формулу можно написать еще иначе. Положивъ $r = q - t$, гдѣ t цѣлое число, меньшее q , получимъ:

$$\cos \frac{2r\pi}{q} = \cos \frac{2(q-t)\pi}{q} = \cos \left(2\pi - \frac{2t\pi}{q} \right) = \cos \frac{2t\pi}{q}$$

$$\text{и } \sin \frac{2r\pi}{q} = \sin \frac{2(q-t)\pi}{q} = \sin \left(2\pi - \frac{2t\pi}{q} \right) = -\sin \frac{2t\pi}{q};$$

слѣдовательно

$$\cos \frac{2r\pi}{q} + \sqrt{-1} \sin \frac{2r\pi}{q} = \cos \frac{2t\pi}{q} - \sqrt{-1} \sin \frac{2t\pi}{q}.$$

Отсюда выходитъ, что всѣ различныя значенія $\sqrt[q]{1}$ заключаются въ формулѣ:

$$\cos \frac{2r\pi}{q} + \sqrt{-1} \sin \frac{2r\pi}{q},$$

гдѣ для r можемъ давать цѣлыя значенія: $0, 1, 2, \dots$ до $\frac{q}{2}$ или $\frac{q-1}{2}$ включительно, смотря потому, будетъ ли q четное или нечетное.

Примѣръ. Найти $\sqrt[q]{1}$. Для этого надо въ предыдущемъ выраженіи положить $q = 4$, а $r = 0, 1$ и 2 , слѣдов. $\sqrt[q]{1}$ равенъ $\cos 0 \pm \sqrt{-1} \sin 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{\pi}{2} = \pm \sqrt{-1}$ и $\cos \pi \pm \sqrt{-1} \sin \pi = -1$.

Слѣствие 2. Положивъ $\tilde{S} = \pi$ и $r = 1$, найдемъ, что $(\cos \pi + \sqrt{-1} \sin \pi)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{-1}$ имѣтъ q различныхъ значеній, заключающихся въ формулѣ:

$$\cos \frac{(2r+1)\pi}{q} + \sqrt{-1} \sin \frac{(2r+1)\pi}{q},$$

гдѣ r есть цѣлое число, равное: $0, 1, 2, \dots$ и $q-1$.

Эту формулу можно написать иначе. Въ самомъ дѣлѣ, если положимъ $r = q-1-t$, гдѣ $t < q-1$,

то найдемъ:

$$\cos \frac{(2r+1)\pi}{q} = \cos \left[2\pi - \frac{(2t+1)\pi}{q} \right] = \cos \frac{(2t+1)\pi}{q}$$

$$\text{и} \quad \sin \frac{(2r+1)\pi}{q} = \sin \left[2\pi - \frac{(2t+1)\pi}{q} \right] = -\sin \frac{(2t+1)\pi}{q};$$

слѣдовательно

$$\cos \frac{(2r+1)\pi}{q} + \sqrt{-1} \sin \frac{(2r+1)\pi}{q} = \cos \frac{(2t+1)\pi}{q} - \sqrt{-1} \sin \frac{(2t+1)\pi}{q}.$$

Отсюда выходитъ, что всѣ значенія $\sqrt[q]{-1}$ заключаются въ формулѣ.

$$\cos \frac{(2r+1)\pi}{q} + \sqrt{-1} \sin \frac{(2r+1)\pi}{q},$$

гдѣ для r можемъ давать цѣлыя значенія: $0, 1, 2, 3, \dots$ до $\frac{q-2}{2}$ или $\frac{q-1}{2}$ включительно, смотря потому, будетъ ли q четное или нечетное число.

Примѣръ. Найти $\sqrt[3]{1}$. Въ предыдущемъ выраженіи положимъ $q = 3$, а r равнымъ 0 и $\frac{3-1}{2} = 1$: слѣдов. $\sqrt[3]{1}$ равенъ $\cos \frac{\pi}{3} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ и $\cos \pi \pm \sqrt{-1} \sin \pi = -1$.

Слѣствие 3. Если требуется опредѣлить всѣ значенія $\sqrt[q]{a + b\sqrt{-1}}$, то положивъ (§ 163) $a = r \cos \varphi$ и $b = r \sin \varphi$, найдемъ:

$$\sqrt[q]{a + b\sqrt{-1}} = \sqrt[q]{r(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)} = \sqrt[q]{r} (\cos \frac{\varphi + 2r\pi}{q} + \sqrt{-1} \sin \frac{\varphi + 2r\pi}{q}),$$

гдѣ для r можемъ давать цѣлыя значенія $0, 1, 2, \dots$ и $q-1$.

§ 168. Разложенье $\sin n\tilde{S}$, $\cos n\tilde{S}$ и $\operatorname{tg} n\tilde{S}$ по степенямъ $\sin \tilde{S}$, $\cos \tilde{S}$ и $\operatorname{tg} \tilde{S}$. Въ предыдущемъ § нашли, что

$$\cos n\tilde{S} + \sqrt{-1} \sin n\tilde{S} = (\cos \tilde{S} + \sqrt{-1} \sin \tilde{S})^n.$$

Возвысив $\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta$ въ n -ую степень ^{*}), получимъ:

$$\cos n\vartheta + \sqrt{-1} \sin n\vartheta = \cos^n \vartheta + n\sqrt{-1} \cos^{n-1} \vartheta \sin \vartheta +$$

$$- \frac{n(n-1)}{1.2} \cos^{n-2} \vartheta \sin^2 \vartheta - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \sqrt{-1} \cos^{n-3} \vartheta \sin^3 \vartheta + \dots$$

Такъ какъ при равенствѣ двухъ мнимыхъ выраженій ихъ дѣйствительныя части, такъ же какъ и мнимыя, равны между собою, то, изъ предъидущаго равенства, найдемъ:

$$\begin{aligned} \cos n\vartheta &= \cos^n \vartheta - \frac{n(n-1)}{1.2} \cos^{n-2} \vartheta \sin^2 \vartheta + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \cos^{n-4} \vartheta \sin^4 \vartheta - \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{а } \sin n\vartheta &= n \cos^{n-1} \vartheta \sin \vartheta - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cos^{n-3} \vartheta \sin^3 \vartheta + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} \cos^{n-5} \vartheta \sin^5 \vartheta - \dots \end{aligned}$$

Смотря потому, будетъ ли n четное или нечетное, послѣдніе члены въ этихъ равенствахъ будутъ различны. Дѣйствительно, если n четное, то послѣдній членъ въ разложеніи $(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^n$ будетъ дѣйствительнымъ и равнымъ $(\sqrt{-1})^n \sin^n \vartheta$, а предпослѣдній членъ будетъ мнимымъ и равнымъ $n(\sqrt{-1})^{n-1} \cos \vartheta \sin^{n-1} \vartheta = \sqrt{-1} n(\sqrt{-1})^{n-2} \cos \vartheta \sin^{n-1} \vartheta$; слѣдовательно, если n четное число, то послѣдній членъ для $\cos n\vartheta$ будетъ $(\sqrt{-1})^n \sin^n \vartheta$, а послѣдній членъ для $\sin n\vartheta$ будетъ $n(\sqrt{-1})^{n-2} \cos \vartheta \sin^{n-1} \vartheta$.

Когда n нечетное число, то послѣдній членъ въ разложеніи $(\cos \vartheta + \sqrt{-1} \sin \vartheta)^n$ будетъ мнимымъ и равнымъ $\sqrt{-1} \sin^n \vartheta$, а предпослѣдній членъ будетъ дѣйствительный и равнымъ $n(\sqrt{-1})^{n-1} \cos \vartheta \sin^{n-1} \vartheta$; слѣдовательно, при n нечетномъ, послѣдній членъ въ разложеніи $\cos n\vartheta$ будетъ $n(\sqrt{-1})^{n-1} \cos \vartheta \sin^{n-1} \vartheta$, а послѣдній членъ въ разложеніи $\sin n\vartheta$ будетъ $(\sqrt{-1})^n \sin^n \vartheta$.

§ 169. Легко теперь опредѣлить $\operatorname{tg} n\vartheta$:

$$\operatorname{tg} n\vartheta = \frac{\sin n\vartheta}{\cos n\vartheta} = \frac{n \cos^{n-1} \vartheta \sin \vartheta - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cos^{n-3} \vartheta \sin^3 \vartheta + \dots}{\cos^n \vartheta - \frac{n(n-1)}{1.2} \cos^{n-2} \vartheta \sin^2 \vartheta + \dots};$$

раздѣливъ все члены въ числительѣ и знаменательѣ на $\cos^n \vartheta$, получимъ:

$$\operatorname{tg} n\vartheta = \frac{n \operatorname{tg} \vartheta - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \operatorname{tg}^3 \vartheta + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} \operatorname{tg}^5 \vartheta - \dots}{1 - \frac{n(n-1)}{1.2} \operatorname{tg}^2 \vartheta + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \operatorname{tg}^4 \vartheta - \dots}$$

^{*} По формулѣ Ньютона имѣемъ. $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3}b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} a^{n-4}b^4 + \dots$

Намъ известны (§ 168) послѣдніе члены въ разложеніи $\cos n\vartheta$ и $\sin n\vartheta$ при n четномъ и n нечетномъ, а потому найдемъ, что, при n четномъ, послѣдній членъ въ числительѣ будетъ $n(V-1)^{n-2} \operatorname{tg}^{n-1} \vartheta$, а послѣдній членъ въ знаменателѣ $(V-1)^n \operatorname{tg}^n \vartheta$; при n нечетномъ послѣдній членъ въ числительѣ будетъ $(V-1)^{n-1} \operatorname{tg}^n \vartheta$, а въ знаменателѣ $(V-1)^{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} \vartheta$.

§ 170. Разложеніе $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ по степенямъ α . Изъ выраженій для $\sin n\vartheta$ и $\cos n\vartheta$, данныхъ въ предыдущемъ параграфѣ, можно вывести разложеніе для $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$.

Для n цѣлаго и положительнаго имѣемъ (§ 168):

$$\sin n\vartheta = n \cos^{n-1} \vartheta \sin \vartheta - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cos^{n-3} \vartheta \sin^3 \vartheta + \dots$$

$$\text{и } \cos n\vartheta = \cos^n \vartheta - \frac{n(n-1)}{1.2} \cos^{n-2} \vartheta \sin^2 \vartheta + \dots$$

Положивъ $n\vartheta = \alpha$, гдѣ α конечная величина, найдемъ: $\vartheta = \frac{\alpha}{n}$.

Изъ этого равенства видимъ, что когда n увеличивается безпредѣльно, то ϑ уменьшается безпредѣльно, и когда $n = \infty$, то $\vartheta = 0$; кромѣ того, изъ равенства $n\vartheta = \alpha$ имѣемъ: $n = \frac{\alpha}{\vartheta}$; слѣдовательно, подставивъ въ

предыдущія равенства $\frac{\alpha}{\vartheta}$ вмѣсто n найдемъ:

$$\sin \alpha = \alpha \cos^{n-1} \vartheta \sin \vartheta - \frac{\alpha(\alpha-\vartheta)(\alpha-2\vartheta)}{1.2.3} \cos^{n-3} \vartheta \left(\frac{\sin \vartheta}{\vartheta}\right)^3 + \dots$$

$$\text{и } \cos \alpha = \cos^n \vartheta - \frac{\alpha(\alpha-\vartheta)}{1.2} \cos^{n-2} \vartheta \left(\frac{\sin \vartheta}{\vartheta}\right)^2 + \dots$$

При безпредѣльномъ увеличеніи n , ϑ стремится къ своему предѣлу—нулю; $\frac{\sin \vartheta}{\vartheta}$ стремится къ 1 и $\cos \vartheta$ къ 1; поэтому, положивъ въ предыдущихъ равенствахъ $n = \infty$, найдемъ:

$$\sin \alpha = \alpha \left[\frac{\alpha^2}{1.2.3} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4.5} - \dots \right]$$

$$\text{и } \cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} - \dots$$

Въ предыдущихъ выраженіяхъ для $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, α есть круговая мѣра угла, а потому, если желаемъ получить \sin и \cos угла въ m° , то должны, во вторыхъ частяхъ этихъ равенствъ, поставить вмѣсто α дробь $\frac{m\pi}{180}$ (§ 13); получимъ:

$$\sin m^\circ = \frac{m\pi}{180} \left[\frac{1}{1.2.3} \left(\frac{m\pi}{180}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3.4.5} \left(\frac{m\pi}{180}\right)^4 - \dots \right]$$

$$\text{и } \cos m^\circ = 1 - \frac{1}{1.2} \left(\frac{m\pi}{180}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3.4} \left(\frac{m\pi}{180}\right)^4 - \dots$$

Найденные ряды для $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ будутъ сходящимися при всякой величинѣ α ; дѣйствительно, n -ый членъ въ рядѣ для $\sin \alpha$ будетъ

$$\frac{(-1)^{n-1} \alpha^{2n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}, \text{ а } (n+1)\text{-ый членъ } \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+1)};$$

слѣдовательно численная величина отношенія $(n+1)$ го члена къ n -ому будетъ: $\frac{\alpha^2}{2n(2n+1)}$, гдѣ для n можно всегда взять такое значеніе, при которомъ предъидущая дробь будетъ менѣе единицы, потому что α есть конечная величина, а n можетъ увеличиваться неопредѣленно.

Также можно показать, что рядъ и для $\cos \alpha$ будетъ сходящимся.

§ 171. Формулы § 170 для разложенія \sin и \cos можно найти по способу неопредѣленныхъ коэффициентовъ. Положимъ:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + e\alpha^4 + \dots \\ \cos \alpha &= A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + E\alpha^4 + \dots \end{aligned}$$

гдѣ $a, b, c, \dots, A, B, C, \dots$ будутъ числа, независимыя отъ α .

Такъ какъ $\sin 0^0 = 0$, а $\cos 0^0 = 1$, то, положивъ въ предъидущихъ равенствахъ $\alpha = 0$, найдемъ:

$$0 = a \text{ и } 1 = A;$$

поэтому

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + e\alpha^4 + \dots \quad (1) \\ \cos \alpha &= 1 + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + E\alpha^4 + \dots \quad (2) \end{aligned}$$

Пусть β будетъ какая нибудь другая круговая мѣра; тогда также будемъ имѣть, что

$$\begin{aligned} \sin \beta &= b\beta + c\beta^2 + d\beta^3 + e\beta^4 + \dots \quad (3) \\ \cos \beta &= 1 + B\beta + C\beta^2 + D\beta^3 + E\beta^4 + \dots \quad (4) \end{aligned}$$

Вычтемъ (3) равенство изъ (1) и (4) изъ (2):

$$\begin{aligned} \sin \alpha - \sin \beta &= b(\alpha - \beta) + c(\alpha^2 - \beta^2) + d(\alpha^3 - \beta^3) + e(\alpha^4 - \beta^4) + \dots \\ \cos \alpha - \cos \beta &= B(\alpha - \beta) + C(\alpha^2 - \beta^2) + D(\alpha^3 - \beta^3) + E(\alpha^4 - \beta^4) + \dots \end{aligned}$$

и раздѣливъ каждое изъ этихъ равенствъ на $\alpha - \beta$, получимъ:

$$\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\alpha - \beta} = b + c(\alpha + \beta) + d(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + e(\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3) + \dots \quad (5)$$

$$\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\alpha - \beta} = B + C(\alpha + \beta) + D(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + E(\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3) + \dots \quad (6)$$

Если положимъ въ этихъ равенствахъ $\alpha = \beta$, то первая часть (5) равенства обратится (§ 87) въ $\cos \alpha$, а первая часть (6) равенства въ $-\sin \alpha$ и тогда

$$\cos \alpha = b + 2c\alpha + 3d\alpha^2 + 4e\alpha^3 + \dots \quad (7)$$

$$-\sin \alpha = B + 2C\alpha + 3D\alpha^2 + 4E\alpha^3 + \dots \quad (8)$$

Сравнивъ эти равенства съ (1) и (2) увидимъ, что

$$\begin{aligned} 1 + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + \dots &= b + 2c\alpha + 3d\alpha^2 + 4e\alpha^3 + \dots \\ -b\alpha - c\alpha^2 - d\alpha^3 \dots &= B + 2C\alpha + 3D\alpha^2 + 4E\alpha^3 + \dots \end{aligned}$$

Эти равенства должны существовать при всех значениях α ; а это возможно, когда коэффициенты при одинаковых степенях α равны. Получимъ:

$$\begin{array}{ll} b = 1, & B = 0 \\ 2c = B, & 2C = -b \\ 3d = C, & 3D = -c \\ 4e = D, \dots & 4E = -d, \dots \end{array}$$

Изъ этихъ равенствъ находимъ послѣдовательно

$$\begin{array}{ll} b = 1, & B = 0, \\ c = 0, & C = -\frac{1}{1 \cdot 2}, \\ d = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, & D = 0, \\ e = 0, & E = -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \\ f = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, & F = 0, \dots \end{array}$$

Подставляя эти величины коэффициентовъ въ (1) и (2) равенства, найдемъ:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \alpha - \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\alpha^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \\ \cos \alpha &= 1 - \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \end{aligned}$$

§ 172. Рѣшеніе двучленныхъ уравненій вида: $x^m = a$, гдѣ a можетъ быть действительнымъ или мнимымъ, а m цѣлое число. *Первый случай* a действительное положительное число. Положивъ въ уравненіи $x^m = a$, $x = y\sqrt[m]{a}$, найдемъ:

$$(y\sqrt[m]{a})^m = a, \text{ или } y^m \cdot a = a \text{ или } y^m = 1,$$

$$\text{откуда (§ 167)} \quad y = \sqrt[m]{1} = \cos \frac{2r\pi}{m} \pm i \sin \frac{2r\pi}{m},$$

гдѣ давая для r цѣлыя значенія $0, 1, 2, \dots$ до $\frac{m}{2}$ или $\frac{m-1}{2}$ включительно, получимъ m различныхъ значеній для y . Такъ какъ $x = y\sqrt[m]{a}$, то слѣдовательно

$$x = \sqrt[m]{a} \left(\cos \frac{2r\pi}{m} \pm i \sin \frac{2r\pi}{m} \right);$$

откуда получимъ m значеній для x , давая r цѣлыя значенія $0, 1, 2, \dots$ до $\frac{m}{2}$ или $\frac{m-1}{2}$ включительно, смотря потому будетъ ли m четное или нечетное число.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $x^3 = 2$. Получимъ

$$x = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{2r\pi}{3} \pm i \sin \frac{2r\pi}{3} \right),$$

гдѣ r равно 0 и 1; следовательно

$$x_1 = \sqrt[3]{2}, \quad x_2 = \sqrt[3]{2} (\cos 120^\circ \pm \sqrt{-1} \sin 120^\circ) = \sqrt[3]{2} \cdot \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

§ 173. Второй случай a действительное и отрицательное число, равное $-b$.

Тогда, положивъ въ уравнении $x^m = b$, $x = y \sqrt[m]{b}$, получимъ.

$$(y \sqrt[m]{b})^m = -b \text{ или } y^m = -1:$$

откуда (§ 167)

$$y = \sqrt[m]{-1} = \cos \frac{(2r+1)\pi}{m} + \sqrt{-1} \sin \frac{(2r+1)\pi}{m},$$

гдѣ r равно 0, 1, 2, до $\frac{m-2}{2}$ или $\frac{m-1}{2}$ включительно, смотря будетъ-ли m четное или нечетное. Следовательно

$$x = \sqrt[m]{b} \left[\cos \frac{(2r+1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{(2r+1)\pi}{m} \right];$$

откуда получимъ m различныхъ значеній для x , полагая r равнымъ 0, 1, 2, . . . и $\frac{m-2}{2}$, если m четное, и равнымъ 0, 1, 2, . . . $\frac{m-1}{2}$, если m нечетное число.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $x^5 + 10 = 0$ На основаніи предыдущаго получимъ:

$$x = \sqrt[5]{10} \left[\cos \frac{(2r+1)\pi}{5} + \sqrt{-1} \sin \frac{(2r+1)\pi}{5} \right],$$

гдѣ r равно 0, 1 и 2; следовательно

$$x = \sqrt[5]{10} \left(\cos \frac{\pi}{5} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{\pi}{5} \right) = \sqrt[5]{10} (\cos 36^\circ \pm \sqrt{-1} \sin 36^\circ)$$

$$= \sqrt[5]{10} \cdot \frac{1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{2\sqrt{5} - 10}}{4};$$

$$x = \sqrt[5]{10} \left(\cos \frac{3\pi}{5} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{3\pi}{5} \right) = \sqrt[5]{10} (\cos 108^\circ \pm \sqrt{-1} \sin 108^\circ)$$

$$= \sqrt[5]{10} \cdot \frac{1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{-2\sqrt{5} - 10}}{4}$$

$$\text{и } x = \sqrt[5]{10} (\cos \pi \pm \sqrt{-1} \sin \pi) = -\sqrt[5]{10}.$$

§ 174. Третій случай. a мнимое и равно $p + q\sqrt{-1}$.

Положивъ въ уравненіи: $x^m = p + q\sqrt{-1}$ (§ 163) $p = \rho \cos \varphi$ и $q = \rho \sin \varphi$,

гдѣ $\rho = \sqrt{p^2 + q^2}$, а φ опредѣляется изъ уравненія: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{q}{p}$, найдемъ:

$$x^m = \rho (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi), \text{ откуда } x = \sqrt[m]{\rho} (\cos \frac{\varphi}{m} + \sqrt{-1} \sin \frac{\varphi}{m})$$

$$\text{или (§ 167)} \quad x = \sqrt[m]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2r\pi}{m} + \sqrt{-1} \sin \frac{\varphi + 2r\pi}{m} \right),$$

гдѣ r цѣлое число, равное 0, 1, 2, и $m - 1$.

§ 175. Легко также решить и уравнение:

$$x^{2m} + px^m + q = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ этого уравненія имѣемъ

$$x^m = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{и} \quad x^m = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

откуда x уже легко опредѣлить (§ 167).

§ 176. Суммирование некоторых тригонометрическихъ рядовъ. Найти сумму синусовъ для угловъ, составляющихъ арифметическую прогрессию.

Положимъ требуется опредѣлить сумму n членовъ:

$$\sin \alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + \dots + \sin[\alpha + (n-1)\beta]$$

Имѣемъ (§ 54):

$$2 \sin \frac{1}{2}\beta \sin \alpha = \cos(\alpha - \frac{1}{2}\beta) - \cos(\alpha + \frac{1}{2}\beta),$$

$$2 \sin \frac{1}{2}\beta \sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \frac{1}{2}\beta) - \cos(\alpha + \frac{3}{2}\beta),$$

$$2 \sin \frac{1}{2}\beta \sin(\alpha + 2\beta) = \cos(\alpha + \frac{3}{2}\beta) - \cos(\alpha + \frac{5}{2}\beta),$$

$$2 \sin \frac{1}{2}\beta \sin[\alpha + (n-1)\beta] = \cos(\alpha + \frac{2n-3}{2}\beta) - \cos(\alpha + \frac{2n-1}{2}\beta).$$

Сложивъ почленно эти равенства и означимъ сумму данного ряда буквою S , получимъ:

$$2S \sin \frac{\beta}{2} = \cos(\alpha - \frac{1}{2}\beta) - \cos(\alpha + \frac{2n-1}{2}\beta).$$

или (§ 54) $2S \sin \frac{\beta}{2} = 2 \sin(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta) \sin \frac{n\beta}{2};$

откуда $S = \frac{\sin(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta) \sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}.$

Положивъ въ данномъ рядѣ $\beta = \alpha$, найдемъ:

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n+1}{2}\alpha \cdot \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

§ 177. Найти сумму косинусовъ для угловъ, составляющихъ арифметическую прогрессию.

Требуется найти сумму n членовъ:

$$\cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \dots + \cos[\alpha + (n-1)\beta].$$

Имѣемъ (§ 54):

$$2 \sin \frac{1}{2}\beta \cos \alpha = \sin(\alpha + \frac{1}{2}\beta) - \sin(\alpha - \frac{1}{2}\beta),$$

$$2 \sin \frac{1}{2}\beta \cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \frac{3}{2}\beta) - \sin(\alpha + \frac{1}{2}\beta),$$

$$2 \sin \frac{1}{2}\beta \cos(\alpha + 2\beta) = \sin(\alpha + \frac{5}{2}\beta) - \sin(\alpha + \frac{3}{2}\beta),$$

$$2 \sin \frac{1}{2}\beta \cos[\alpha + (n-1)\beta] = \sin(\alpha + \frac{2n-1}{2}\beta) - \sin(\alpha + \frac{2n-3}{2}\beta).$$

Означивъ искомую сумму буквою S и сложивъ почленно эти равенства, найдемъ:

$$2S \cdot \sin \frac{\beta}{2} = \sin \left(\alpha + \frac{2n-1}{2} \beta \right) - \sin \left(\alpha - \frac{1}{2} \beta \right),$$

или (§ 54)
$$2S \cdot \sin \frac{\beta}{2} = 2 \cos \left(\alpha + \frac{n-1}{2} \beta \right) \sin \frac{n\beta}{2};$$

откуда
$$S = \frac{\cos \left(\alpha + \frac{n-1}{2} \beta \right) \sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

Если положимъ $\beta = \alpha$, то найдемъ:

$$\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{\cos \frac{n+1}{2} \alpha \cdot \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

§ 178. *Найти сумму n членовъ:*

$$\operatorname{cosec} \alpha + \operatorname{cosec} 2\alpha + \operatorname{cosec} 4\alpha + \dots + \operatorname{cosec} 2^{n-1}\alpha.$$

Имѣемъ (§ 64, примѣчаніе):

$$\operatorname{cosec} \alpha = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\operatorname{cosec} 2\alpha = \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha,$$

$$\operatorname{cosec} 2^{n-1}\alpha = \operatorname{ctg} 2^{n-2}\alpha - \operatorname{ctg} 2^{n-1}\alpha.$$

Означивъ искомую сумму буквою S , найдемъ:

$$S = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg} 2^{n-1}\alpha.$$

§ 179. *Найти сумму n членовъ:*

$$\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2^{n-1}}$$

Имѣемъ (§ 56, примѣръ III):

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha - 2 \operatorname{ctg} 2\alpha,$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2^2} = \frac{1}{2^2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2^2} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

$$\dots \dots \dots \frac{1}{2^{n-1}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-2}} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2^{n-2}}$$

Означивъ искомую сумму буквою S , получимъ:

$$S = \frac{1}{2^{n-1}} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2^{n-1}} - 2 \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

ОТДѢЛЪ XIII.

О круговыхъ функцияхъ.

§ 180. **Опредѣленіе.** Возьмемъ уравненіе: $\sin x = a$ здѣсь x есть *круговая мѣра угла, которая синусъ равенъ a* , что выражаютъ такъ: $x = \arcsin a$ *); слѣдовательно, если имѣемъ выраженіе $\arcsin a$, то его надо читать такъ: *круговая мѣра угла, котораго синусъ равенъ a* . Выраженія $\arcsin a$, $\arcsin \cos a$, $\arcsin \operatorname{tg} a$ и т. д. наз. *круговыми функциями* и выговариваются такъ *арксинусъ a , арккосинусъ a , арктангенсъ a и т. д.*

Такъ какъ угловъ, имѣющихъ ту же тригонометрическую величину, безчисленное множество, то поэтому выраженія: $\arcsin a$, $\arcsin \cos a$ и т. д. имѣютъ безчисленное множество значений для данного числа a .

§ 181. Если дана величина a , то легко выразить круговую функцію въ градусахъ, минутахъ и секундахъ. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ требуется $\arcsin a$ выразить въ градусахъ, минутахъ и секундахъ; для этого, положимъ $\arcsin a = x$; тогда увидимъ, что x есть круговая мѣра угла, котораго синусъ равенъ a , т. е. $\operatorname{tg} x = a$; откуда, по логарифмамъ тригонометрическихъ величинъ, опредѣлимъ наименьшее (независимо отъ знака) значеніе для x . Зная же наименьшее значеніе для x , опредѣлимъ и общее выраженіе для x .

Примѣръ I. Найти наименьшую величину $\arcsin 2,5$.

Положивъ $\arcsin 2,5 = x$, найдемъ: $\operatorname{ctg} x = 2,5$, а $\lg \operatorname{ctg} x = \lg 2,5 = 0,3979400$; откуда $x = 21^\circ 48' 3'',07$ съ точностью до $0'',01$.

Примѣръ II. Опредѣлить $\arcsin (\operatorname{tg} 0,2)$.

Положивъ $\arcsin \operatorname{tg} 0,2 = x$, найдемъ $\operatorname{tg} x = 0,2$ и $x = 11^\circ 18' 35'',76$; слѣдовательно $\arcsin (\operatorname{tg} 0,2) = \arcsin 11^\circ 18' 35'',76 = 0,1961162$.

Примѣръ III. Опредѣлить $\arcsin (\cos 16^\circ 18')$.

Положивъ $\arcsin (\cos 16^\circ 18') = x$, найдемъ $\sin x = \cos 16^\circ 18'$, а слѣдовательно (§ 45) $x = \pi - (16^\circ 18')$. $73^\circ 59' 42''$, гдѣ π цѣлое число.

§ 182. **Свойства круговыхъ функций.** Свойства круговыхъ функций легко могутъ быть выведены на основаніи свойствъ тригонометрическихъ функций, что видно изъ послѣдующаго.

*) \arcsin есть три начальныя буквы слова *arcus* — дуга

I) Сумма наименьшихъ значений $\arcsin a$ и $\arcsin \cos a$, также какъ $\arcsin \operatorname{tg} a$ и $\arcsin \operatorname{ctg} a$, также какъ $\arcsin \operatorname{sec} a$ и $\arcsin \operatorname{cosec} a$, равна $\frac{\pi}{2}$.

Въ самомъ дѣлѣ, положивъ $\arcsin a = x$, найдемъ: $\sin x = a$; но $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, а потому $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a$ и (§ 180) $\frac{\pi}{2} - x = \arcsin \cos a$, следовательно

$$\arcsin a + \arcsin \cos a = \frac{\pi}{2}.$$

Точно также докажемъ, что

$$\arcsin \operatorname{tg} a + \arcsin \operatorname{ctg} a = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \arcsin \operatorname{sec} a + \arcsin \operatorname{cosec} a = \frac{\pi}{2}.$$

II) Одну изъ круговыхъ функций всегда можно выразить въ зависимости отъ другой круговой функции.

Примѣръ I. Требуется $\arcsin a$ выразить по $\arcsin \operatorname{tg}$. Положивъ, $\arcsin a = x$, найдемъ: $\sin x = a$; но

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}; \quad \text{откуда} \quad x = \arcsin \operatorname{tg} \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

И такъ

$$\arcsin a = \arcsin \operatorname{tg} \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Примѣръ II. Выразить $\arcsin \operatorname{sec} a$ по $\arcsin \cos$. Положивъ:

$$\arcsin \operatorname{sec} a = x, \quad \text{найдемъ:} \quad \operatorname{sec} x = a;$$

но $\operatorname{sec} x = \frac{1}{\cos x}$ или $a = \frac{1}{\cos x}$; откуда $\cos x = \frac{1}{a}$ и $x = \arcsin \cos \frac{1}{a}$; следовательно $\arcsin \operatorname{sec} a = \arcsin \cos \frac{1}{a}$.

§ 183. Сложеніе и вычитаніе круговыхъ функций. Покажемъ здѣсь сложеніе и вычитаніе только одноименныхъ круговыхъ функций, потому что всегда можемъ (§ 182, II) сдѣлать круговыя функции одноименными.

I. Найти $\arcsin a \pm \arcsin b$. Положивъ:

$$\arcsin a = x, \quad \arcsin b = y;$$

тогда

$$\sin x = a, \quad \sin y = b;$$

но $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$, а потому

$$\sin(x \pm y) = a\sqrt{1 - b^2} \pm b\sqrt{1 - a^2};$$

откуда

$$x \pm y = \arcsin(a\sqrt{1 - b^2} \pm b\sqrt{1 - a^2}).$$

И такъ

$$\arcsin a \pm \arcsin b = \arcsin(a\sqrt{1 - b^2} \pm b\sqrt{1 - a^2}). \quad (1)$$

II. Найти $\arcsin \cos a + \arcsin \cos b$. Поступая также, какъ въ предыдущемъ случаѣ, найдемъ:

$$\arccos a \pm \arccos a = \arccos [ab \mp \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}] \dots (2)$$

III Найти $\arctg a \pm \arctg b$. Положивъ:

$$\arctg a = x, \arctg b = y;$$

найдемъ, что

$$\operatorname{tg} x = a, \operatorname{tg} y = b \text{ и } \operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{a \pm b}{1 \mp ab};$$

откуда

$$x \pm y = \arctg \frac{a \pm b}{1 \mp ab} \text{ или } \arctg a \pm \arctg b = \arctg \frac{a \pm b}{1 \mp ab} \dots (3)$$

Примѣръ. Найти $\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}$. Положивъ въ предыдущемъ равенствѣ $a = \frac{1}{2}$ и $b = \frac{1}{3}$, получимъ: $\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$.

IV Найти $\operatorname{ctg} a \pm \operatorname{ctg} b$. Найдемъ:

$$\operatorname{ctg} a \pm \operatorname{ctg} b = \operatorname{ctg} \frac{ab \mp 1}{a \mp b} \dots (4)$$

§ 184. Умноженіе круговой функціи на цѣлое число. Произведеніе круговой функціи на цѣлое число n можно представить въ видѣ суммы n круговыхъ функціи, и тогда, пользуясь формулами предыдущаго параграфа, представить искомое произведеніе въ видѣ круговой функціи.

Напр. найти $3 \arctg a$. Имѣемъ:

$$3 \arctg a = \arctg a + \arctg a + \arctg a;$$

положивъ (§ 183) въ (3) формулѣ $b = a$, найдемъ:

$$2 \arctg a = \arctg \frac{2a}{1 - a^2};$$

слѣдов.

$$3 \arctg a = \arctg \frac{2a}{1 - a^2} + \arctg a;$$

положивъ въ (3) формулѣ (§ 183) $b = \frac{2a}{1 - a^2}$, найдемъ

$$3 \arctg a = \arctg \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2}.$$

Точно также можно найти и $4 \arctg a$ и т. д.

§ 185. Дѣленіе круговой функціи на цѣлое число. Пусть, напримѣръ, дано опредѣлить $\frac{1}{n} \arcsin a$. Положивъ $\frac{1}{n} \arcsin a = x$, найдемъ: $\arcsin a = nx$ или $\sin nx = a$. Изъ этого уравненія, на основаніи § 55, можно опредѣлить $\sin x$ по a ; отсюда уже легко найти x . Эту задачу не всегда можно рѣшить помощью элементарной алгебры.

Примѣръ. Найти $\frac{\arccos a}{4}$. Положивъ $\frac{\arccos a}{4} = x$, найдемъ:

$\arccos a = 4x$ и $\cos 4x = a$. Но (§ 55) $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2(2\cos^2 x - 1) - 1 = 4\cos^2 x - 3$; слѣдовательно $4\cos^2 x - 3 = a$; отсюда $\cos x = \pm \frac{\sqrt{a+3}}{2}$

и $x = \arccos \left(\frac{\sqrt{a+3}}{2} \right)$. И такъ $\frac{\arccos a}{4} = \arccos \left(\frac{\sqrt{a+3}}{2} \right)$.

§ 166. Разложенеіе $\text{arc tg } x$ по степенямъ x . Разложимъ $\text{arc tg } x$ по степенямъ x по способу неопредѣляемыхъ коэффициентовъ и для этого положимъ:

$$\text{arc tg } x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \dots$$

Но при $x=0$, $\text{arc tg } 0^0 = 0$, а потому $A = 0$ и

$$\text{arc tg } x = Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \dots \quad (1);$$

такимъ же образомъ:

$$\text{arc tg } y = By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \dots \quad (2).$$

Вычтя (2) равенство изъ (1) и раздѣливъ обѣ части на $x - y$, найдемъ:

$$\frac{\text{arc tg } x - \text{arc tg } y}{x - y} = B + C(x + y) + D(x^2 + xy + y^2) + \dots \quad (3).$$

Если положимъ $x = u$, то первая часть приметъ видъ $\frac{0}{0}$, а потому, чтобы найти истинное значеніе этой дроби, положимъ:

$$\text{arc tg } x = u, \text{ arc tg } y = v;$$

тогда $x = \text{tg } u$, $y = \text{tg } v$ и

$$\frac{\text{arc tg } x - \text{arc tg } y}{x - y} = \frac{u - v}{\text{tg } u - \text{tg } v} = \frac{(u - v) \cos u \cos v}{\sin(u - v)}.$$

Если $x = y$, то $u = v$, а предѣлъ отношенія

$$\frac{\sin(u - v)}{u - v} \text{ или } \frac{u - v}{\sin(u - v)} \text{ равенъ (§ 69) 1;}$$

слѣд. предѣлъ
$$\frac{\text{arc tg } x - \text{arc tg } y}{x - y} = \cos^2 u = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 u} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

И такъ, при $x = y$, равенство (3) приметъ видъ.

$$\frac{1}{1 + x^2} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \dots$$

Произведемъ на самомъ дѣлѣ дѣленіе 1 на $1 + x^2$, получимъ:

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

и слѣд.

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \dots;$$

откуда, сравнивъ коэффициенты при одинаковыхъ степеняхъ x , найдемъ

$$B = 1, C = 0, D = -\frac{1}{3}, E = 0, F = \frac{1}{5}, \dots$$

и (1)
$$\text{arc tg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (4)$$

Этотъ рядъ будетъ сходящимся для $x^2 < 1$; помощью его можно вычислить π съ какою угодно точностью.

Мы знаемъ, что $\text{arc tg } 1 = \frac{\pi}{4}$, а потому, положимъ въ (4) равенствѣ

$x = 1$, найдемъ:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Хотя π изъ этого равенства и можно вычислить съ какою угодно числомъ знаковъ, но только потребуется вычислить весьма большое число членовъ, чтобы получить π съ большою точностью; поэтому, пользуются другими разложениями, выведенными изъ формулы для $\arctg x$.

Пусть a и b будутъ двѣ дуги, кот. сумма равна $\frac{\pi}{4}$; если $\operatorname{tg} a = \frac{1}{2}$, то

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - a \right) = \frac{1}{3} \text{ и потому}$$

$$a = \arctg \frac{1}{2}, \quad b = \arctg \frac{1}{3} \text{ и } \frac{\pi}{4} = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}.$$

Разложивъ $\arctg \frac{1}{2}$ и $\arctg \frac{1}{3}$ по (4) формулѣ, найдемъ:

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \dots \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \dots \right)$$

Эта формула принадлежитъ Эйлеру. Но Machin нашелъ для $\frac{\pi}{4}$ еще болѣе сходящейся рядъ, а слѣд. еще болѣе удобный для вычисленія π .

Пусть a и b будутъ двѣ дуги, для которыхъ:

$$4a - b = \frac{\pi}{4};$$

положивъ $\operatorname{tg} a = \frac{1}{5}$, найдемъ, что

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{tg} 4a = \frac{2 \operatorname{tg} 2a}{1 - \operatorname{tg}^2 2a} = \frac{120}{119}; \text{ но } b = 4a - \frac{\pi}{4},$$

$$a \quad \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} \left(4a - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\operatorname{tg} 4a - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} 4a \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{239}.$$

Изъ равенствъ: $\operatorname{tg} a = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg} b = \frac{1}{239}$ и $4a - b = \frac{\pi}{4}$, слѣдуетъ, что

$$a = \arctg \frac{1}{5}, \quad b = \arctg \frac{1}{239} \text{ и } \frac{\pi}{4} = 4 \arctg \frac{1}{5} - \arctg \frac{1}{239}.$$

Разложимъ $\arctg \frac{1}{5}$ и $\arctg \frac{1}{239}$ по (4) формулѣ, получимъ:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \dots \right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \dots \right)$$

Достаточно вычислить 11 членовъ первой группы и 3 члена второй, чтобы получить π съ 15 десятичными знаками, а именно

$$\pi = 3,141592653589793.$$

СОБРАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ.

Задачи на введеніе.

1. Выразить въ минутахъ величину дуги, равной радіусу.
2. Выразить въ секундахъ величину дуги, равной радіусу.
3. Найти круговую мѣру угловъ въ 60° и 135° .
4. Круговыя мѣры угловъ будутъ: $\frac{7}{12}\pi$, $1,48\pi$ и $4\frac{3}{7}\pi$; выразить величины этихъ угловъ въ градусахъ, минутахъ и секундахъ.

Опредѣлить круговую мѣру угловъ (5—16):

5. 37° .
6. 270° .
7. $42'36''$.
8. $35^\circ18'$.
9. $23''086$.
10. $5^\circ24'46''$.
11. $196^\circ53'7''$.
12. $49^\circ38''16$.
13. $212^\circ7'3''08$.
14. $86^\circ19'38''75$.
15. $348^\circ21'51''6$.
16. $516^\circ49'45''7$.

Опредѣлить величины угловъ въ градусахъ минутахъ и секундахъ, когда даны ихъ круговыя мѣры (17—32):

- | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 17. 0,2149664. | 18. 2,5483261. | 19. 0,0000044. | 20. 0,0006207. |
| 21. 0,01685. | 22. 0,0288. | 23. 0,104976. | 24. 1,24568. |
| 25. 1,9865437. | 26. 2,48. | 27. 2,7. | 28. 3,016. |
| 29. 3,540687. | 30. 4,0001. | 31. 5. | 32. 9,6. |

Задачи на I отдѣлъ.

1. Найти тригонометрическія величины для угловъ: -90° , -180° , -270° и -360° .

Найти (2—29):

2. $\sin 450^\circ$.
3. $\cos 900^\circ$.
4. $\operatorname{tg} 3150^\circ$.
5. $\operatorname{sec} 1980^\circ$.
6. $\operatorname{sinvers} 810^\circ$.
7. $\operatorname{cosinvers} 2430^\circ$.
8. $\sin(-540^\circ)$.
9. $\cos(-420^\circ)$.
10. $\operatorname{tg}(-390^\circ)$.
11. $\operatorname{ctg}(-765^\circ)$.
12. $\operatorname{sec}(-750^\circ)$.
13. $\operatorname{cosec}(-990^\circ)$.
14. $a \sin 90^\circ + b \cos 0^\circ - (a + b) \operatorname{ctg} 270^\circ$.

15. $5 \cos 180^\circ - 12 \sin 270^\circ - \operatorname{tg} 360^\circ$.
 16. $10 \sin(-90^\circ) + 4 \sec(-180^\circ) + 5 \operatorname{cosec} 270^\circ$.
 17. $(8 + \cos 270^\circ)(4 - \sin 180^\circ)$.
 18. $32 : [\cos(-180^\circ) - 5 \sin(-270^\circ)]$.
 19. $a^2 - 2ab \sin 270^\circ + b^2 \cos^2 360^\circ$.
 20. $\operatorname{ntg} 180^\circ + m \cos(-180^\circ) + (m-n) \sin 450^\circ$.
 21. $1,6 \sec 180^\circ - 4 \operatorname{cosec} 90^\circ + \sin 540^\circ + 1$.
 22. $\frac{35}{\operatorname{tg} 90^\circ}$. 23. $\frac{10}{\operatorname{ctg} 270^\circ}$. 24. $\frac{7 - 6 \operatorname{tg}(-180^\circ)}{4 \operatorname{ctg} 360^\circ + \cos 270^\circ}$.
 25. $(m^2 - n^2) \operatorname{ctg} 90^\circ + \frac{2nm}{\cos 180^\circ} - \frac{m^2 + n^2}{\sin 270^\circ}$.
 26. $a^2 \sin 5\alpha + b^2 \cos 2\alpha - \frac{2ab}{\operatorname{tg} 3\alpha}$ при $\alpha = 90^\circ$.
 27. $4 \operatorname{ctg}^2 45^\circ + \cos 60^\circ + 2,5$. 28. $\sec 45^\circ \cdot \operatorname{cosec} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$.
 29. $2 \sin(-45^\circ) - \sqrt{6} \operatorname{tg}(-60^\circ)$.
 30. Построить меньший из угловъ, когда: а) $\sin \alpha = 0,8$;
 б) $\cos \alpha = \frac{5}{9}$; в) $\cos \alpha = -0,25$; д) $\operatorname{tg} \alpha = 3$; е) $\operatorname{ctg} \alpha = -4$;
 ф) $\sec \alpha = -1\frac{1}{2}$ и г) $\operatorname{cosec} \alpha = -1,4$.
 31. Построить: а) $k \sin \alpha$; б) $k \cos \alpha$; в) $k \operatorname{tg} \alpha$; д) $k \operatorname{ctg} \alpha$; е) $k \sec \alpha$
 и ф) $k \operatorname{cosec} \alpha$, гдѣ k данная длина, а α данный острый уголъ.
 32. Пусть α данный острый уголъ; найти построениемъ уголъ x , когда: а) $\cos x = \frac{1}{4} \sin \alpha$; б) $\sin x = 0,2 \cos \alpha$; в) $\operatorname{tg} x = 3 \cos \alpha$;
 д) $\operatorname{ctg} x = 4 \operatorname{tg} \alpha$ и е) $\operatorname{ctg} x = \frac{2}{3} \sec \alpha$.
- Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC , гдѣ уголъ C прямой, означимъ стороны, противолежащія угламъ A , B и C , буквами a , b и c ; слѣд. a и b будутъ катеты, а c гипотенуза этого треугольника. Рѣшить слѣд. задачи:
33. Дано: $a = 0,3$ и $b = 0,4$. Найти $\sin A$.
 34. » $b = 1$ и $c = 3$. Найти $\cos B$.
 35. » $a = 1$ и $c = 1\frac{1}{2}$. Найти $\operatorname{tg} A$.
 36. » $a = 6$ и $c = 10$. Найти $\operatorname{ctg} A$.
 37. » $\sin A = 0,7$ и $a = 14$. Найти b и c .
 38. » $\sin A = 0,25$ и $c = 40$. Найти a и b .
 39. » $\cos A = \sqrt{0,4}$ и $a = 6$. Найти b и c .
 40. » $\cos B = \frac{2}{3}$, и $a = 24$. Найти b и c .
 41. » $\operatorname{tg} A = 6$ и $a = 12$. Найти b и c .
 42. » $\operatorname{tg} B = 1,5$ и $a = 0,8$. Найти b и c .

43. Дано: $\operatorname{ctg} A = 2$ и $b = 4$. Найти a и c .

44. » $\operatorname{ctg} B = 3$, и $c = 15$. Найти a и b .

45. » $\sec A = \sqrt{5}$ и $b = 9$. Найти a и c .

46. » $\operatorname{cosec} B = 1,25$ и $a = 0,6$. Найти b и c .

Найти тригонометрическія величины для угла α , когда (47—51):

47. $\sin \alpha = 0,8$. 48. $\cos \alpha = 1/3$. 49. $\operatorname{tg} \alpha = 1,25$.

50. $\sec \alpha = \sqrt{3}$. 51. $\operatorname{cosec} \alpha = 4$.

Найти тригонометрическія величины для угла α , когда дана одна изъ его тригонометрическихъ величинъ (52—75):

52. $\sin \alpha = 0,4$, гдѣ $\angle \alpha$ принадлежитъ 1-ой четверти.

53. $\sin \alpha = 5/6$ » » » 2-ой »

54. $\sin \alpha = -0,5$ » » » 3-ей »

55. $\sin \alpha = -\sqrt{0,2}$ » » » 4-ой »

56. $\cos \alpha = 1/6$ » » » 1-ой »

57. $\cos \alpha = -\sqrt{3/7}$ » » » 2-ой »

58. $\cos \alpha = -0,6$ » » » 3-ей »

59. $\cos \alpha = 0,9$ » » » 4-ой »

60. $\operatorname{tg} \alpha = 2$ » » » 1-ой »

61. $\operatorname{tg} \alpha = -7$ » » » 2-ой »

62. $\operatorname{tg} \alpha = 1 1/3$ » » » 3-ей »

63. $\operatorname{tg} \alpha = -0,75$ » » » 4-ой »

64. $\operatorname{ctg} \alpha = 1/3$ » » » 1-ой »

65. $\operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{3}$ » » » 2-ой »

66. $\operatorname{ctg} \alpha = 1,6$ » » » 3-ей »

67. $\operatorname{ctg} \alpha = -0,5$ » » » 4-ой »

68. $\sec \alpha = 3$ » » » 1-ой »

69. $\sec \alpha = -5$ » » » 2-ой »

70. $\sec \alpha = -1,4$ » » » 3-ей »

71. $\sec \alpha = 1 2/3$ » » » 4-ой »

72. $\operatorname{cosec} \alpha = 1 1/2$ » » » 1-ой »

73. $\operatorname{cosec} \alpha = 2,5$ » » » 2-ой »

74. $\operatorname{cosec} \alpha = -8$ » » » 3-ей »

75. $\operatorname{cosec} \alpha = -3$ » » » 4-ой »

76. Данъ $\sin \alpha = 0,3$, гдѣ уголъ α принадлежитъ второй четверти; найти тригонометрическія величины для угла $-\alpha$.

77. Данъ $\cos \alpha = -\sqrt{1/3}$, гдѣ уголъ α принадлежитъ третьей четверти; найти тригон. величины для угла $-\alpha$.

78. Даны $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{8}$, гдѣ $270^\circ < \alpha < 360^\circ$; найти тригоном. величины для угла $-\alpha$.

79. Даны $\operatorname{ctg}(-\alpha) = 2$, гдѣ $90^\circ < \alpha < 180^\circ$; найти $\operatorname{cosec}(-\alpha)$, $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$.

80. Даны $\sec \alpha = -3$, гдѣ уголъ α принадлежитъ третьей четверти; найти $\operatorname{tg}(-\alpha)$ и $\sin(-\alpha)$.

81. Даны $\operatorname{cosec} \alpha = 4$, гдѣ $90^\circ < \alpha < 180^\circ$; найти $\sec(-\alpha)$, $\operatorname{ctg}(-\alpha)$ и $\sin(-\alpha)$.

82. Найти величину $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$, когда $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и уголъ α принадлежитъ второй четверти.

83. Найти величину $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$, когда $\operatorname{ctg} \alpha = 3$ и уголъ α принадлежитъ третьей четверти.

84. Найти величину: $\frac{\sec \alpha - \cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}$, когда $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{\frac{m}{n}}$ и уголъ α принадлежитъ четвертой четверти.

Показать (85—104):

$$85. \sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha - \cos^2 \alpha.$$

$$86. \sin^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha - \cos^2 \alpha.$$

$$87. \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha - \operatorname{cosec}^2 \alpha. \quad 88. \sec \alpha - \cos \alpha = \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

$$89. \frac{\sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{\sec \alpha}. \quad 90. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}.$$

$$91. \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha} = \sin \alpha \cdot \cos \alpha. \quad 92. \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

$$93. \frac{\cos \alpha + \sec \alpha}{\cos \alpha - \sec \alpha} = -\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{cosec}^2 \alpha.$$

$$94. (\sec^2 \alpha - 1)(\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1) = 1. \quad 95. \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha$$

$$96. \sec^2 \alpha \cdot \operatorname{cosec}^2 \alpha = \sec^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha.$$

$$97. \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha.$$

$$98. \sin \alpha = \pm \sqrt{(\sec^2 \alpha - 1) : (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}.$$

$$99. \cos \alpha = \pm \sqrt{(\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1) : (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)}.$$

$$100. \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta.$$

$$101. \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta.$$

$$102. \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha.$$

$$103. \sin \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha) + \cos \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha) = \sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha.$$

$$104. (\operatorname{cosec} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2 = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Рѣшить уравненія (105 — 121):

$$105. a \sin x = b \operatorname{cosec} x. \quad 106. \operatorname{tg} x : \operatorname{ctg} x = b.$$

$$107. \sin x \cdot \sec x = a \operatorname{ctg} x.$$

$$108. a (\sin x + \operatorname{tg} x) = b (1 + \cos x).$$

$$109. a (\sin x + \operatorname{tg} x) - b (\operatorname{tg} x - \sin x).$$

$$110. a (\operatorname{tg} x - \sin x) : (\operatorname{tg} x + \sin x) = b (1 - \cos x).$$

$$111. \operatorname{tg} x \pm \sec x = a. \quad 112. \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{ctg} x = 6.$$

$$113. a \sin x = b \cos^2 x. \quad 114. a \sin x = b : \operatorname{tg} x.$$

$$115. \sin x \cos x = \sqrt{\frac{2}{9}}. \quad 116. \sin x + \cos x = \sqrt{2}.$$

$$117. a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$118. \cos^2 x - \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \frac{17}{30}.$$

$$119. \sin x = a \sin y, \operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} y. \quad 120. \operatorname{tg} x = \sin y, \sin x = 2 \operatorname{ctg} y.$$

$$121. 2 \operatorname{ctg} x + 4 \operatorname{ctg} y = 1, \quad 9 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4.$$

$$122. \text{Если } m = \operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha \text{ и } n = \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha, \text{ то } \cos \alpha = \frac{m-n}{m+n}.$$

$$123. \text{Если } \cos x = \frac{\cos A}{\cos C} \text{ и } \cos(90^\circ - x) = \frac{\cos B}{\sin C},$$

$$\text{то } \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1.$$

$$124. \text{Если } \left(\frac{\sin A}{\sin B} \right)^2 + (\cos A \cos C)^2 = 1, \text{ то } \sin C = \pm \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}.$$

Найти истинныя величины выражений (125 — 130):

$$125. \frac{1 + \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \text{ при } \alpha = 180^\circ. \quad 126. \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \text{ при } \alpha = 0^\circ.$$

$$127. \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha} \text{ при } \alpha = 90^\circ. \quad 128. \frac{1 + \sec \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \text{ при } \alpha = 180^\circ.$$

$$129. \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} \text{ при } \alpha = 45^\circ. \quad 130. \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \sec \alpha} \text{ при } \alpha = 0^\circ.$$

Задачи на II отдѣлъ.

1. Выразить по \sin острого угла:

- a) $\sin 160^\circ$; b) $\sin 232^\circ 17'$; c) $\sin 317^\circ 29''$; d) $\sin 593^\circ$;
e) $\cos 144^\circ$; f) $\cos 198^\circ 26'$; g) $\cos 288^\circ 6' 18''$ и h) $\cos 1000^\circ$.

2. Выразить по \cos острого угла:

- a) $\sin 96^\circ 47' 35''$; b) $\sin 203^\circ$; c) $\sin 342^\circ 56'$; d) $\sin 1180^\circ$;
e) $\cos 165^\circ 24''$; f) $\cos 218^\circ$; g) $\cos 309^\circ$ и h) $\cos 487^\circ$.

3. Выразить по tg острого угла:

- a) $\operatorname{tg} 100^{\circ}42'$; b) $\operatorname{tg} 182^{\circ}5'$; c) $\operatorname{tg} 308^{\circ}$; d) $\operatorname{tg} 676^{\circ}$;
 e) $\operatorname{ctg} 125^{\circ}25''$; f) $\operatorname{ctg} 247^{\circ}8''$; g) $\operatorname{ctg} 275^{\circ}$ и h) $\operatorname{ctg} 845^{\circ}$.

4. Выразить по ctg острого угла:

- a) $\operatorname{tg} 92^{\circ}25'46''$; b) $\operatorname{tg} 194^{\circ}26'$; c) $\operatorname{tg} 348^{\circ}$; d) $\operatorname{tg} 475^{\circ}$;
 e) $\operatorname{ctg} 172^{\circ}11'24''$; f) $\operatorname{ctg} 200^{\circ}$; g) $\operatorname{ctg} 358^{\circ}$ и h) $\operatorname{ctg} 1600^{\circ}$.

5. Выразить по sec острого угла:

- a) $\operatorname{sec} 204^{\circ}19''$; b) $\operatorname{sec} 310^{\circ}$; c) $\operatorname{cosec} 152^{\circ}$ и d) $\operatorname{cosec} 485^{\circ}30'$.

6. Выразить по cosec острого угла:

- a) $\operatorname{sec} 142^{\circ}24'$; b) $\operatorname{sec} 588^{\circ}$; c) $\operatorname{cosec} 262^{\circ}$ и d) $\operatorname{cosec} 320^{\circ}$.

7. Дано: $\sin \alpha = 0,8^*$. Найти:

$$\sin(270^{\circ} - \alpha); \cos(\alpha - 90^{\circ}); \operatorname{tg}(540^{\circ} - \alpha); \operatorname{ctg}(270^{\circ} + \alpha); \operatorname{sec}(180^{\circ} - \alpha); \operatorname{cosec}(180^{\circ} + \alpha).$$

8. Дано: $\sin(90^{\circ} + \alpha) = \frac{1}{3}$. Найти:

$$\sin(360^{\circ} - \alpha); \cos(\alpha - 180^{\circ}); \operatorname{tg}(\alpha - 90^{\circ}); \operatorname{ctg}(180^{\circ} - \alpha); \operatorname{sec}(\alpha - 270^{\circ}); \operatorname{cosec}(270^{\circ} + \alpha).$$

9. Дано: $\sin(180^{\circ} + \alpha) = -\sqrt{\frac{5}{9}}$. Найти:

$$\sin(\alpha - 90^{\circ}); \cos(-\alpha - 270^{\circ}); \operatorname{tg}(\alpha - 180^{\circ}); \operatorname{ctg}(270^{\circ} - \alpha); \operatorname{sec}(\alpha - 360^{\circ}); \operatorname{cosec}(\alpha + 90^{\circ}).$$

10. Дано: $\sin(360^{\circ} - \alpha) = -0,4$. Найти:

$$\sin(\alpha - 270^{\circ}); \cos(-\alpha - 360^{\circ}); \operatorname{tg}(180^{\circ} + \alpha); \operatorname{ctg}(\alpha - 90^{\circ}); \operatorname{sec}(-\alpha - 90^{\circ}); \operatorname{cosec}(180^{\circ} - \alpha).$$

11. Дано: $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Найти:

$$\sin(\alpha + 180^{\circ}); \cos(-\alpha - 180^{\circ}); \operatorname{tg}(270^{\circ} - \alpha); \operatorname{ctg}(\alpha - 270^{\circ}); \operatorname{sec}(360^{\circ} - \alpha); \operatorname{cosec}(\alpha + 270^{\circ}).$$

12. Дано: $\cos(\alpha - 90^{\circ}) = \frac{1}{9}$. Найти:

$$\sin(360^{\circ} - \alpha); \cos(\alpha - 180^{\circ}); \operatorname{tg}(\alpha - 270^{\circ}); \operatorname{ctg}(\alpha + 90^{\circ}); \operatorname{sec}(270^{\circ} + \alpha); \operatorname{cosec}(\alpha - 360^{\circ}).$$

13. Дано: $\cos(180^{\circ} - \alpha) = -\sqrt{0,75}$. Найти:

$$\sin(90^{\circ} + \alpha); \cos(\alpha - 270^{\circ}); \operatorname{tg}(\alpha - 360^{\circ}); \operatorname{ctg}(180^{\circ} - \alpha); \operatorname{sec}(\alpha - 90^{\circ}); \operatorname{cosec}(270^{\circ} - \alpha).$$

↑ 14. Дано: $\cos(\alpha - 270^{\circ}) = -0,4$. Найти:

$$\sin(270^{\circ} + \alpha); \cos(-\alpha - 90^{\circ}); \operatorname{tg}(360^{\circ} - \alpha); \operatorname{ctg}(180^{\circ} + \alpha); \operatorname{sec}(\alpha - 90^{\circ}); \operatorname{cosec}(-\alpha - 270^{\circ}).$$

15. Дано: $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Найти:

$$\sin(180^{\circ} - \alpha); \cos(270^{\circ} + \alpha); \operatorname{tg}(90^{\circ} + \alpha); \operatorname{ctg}(-\alpha - 360^{\circ}); \operatorname{sec}(\alpha - 270^{\circ}); \operatorname{cosec}(-\alpha - 90^{\circ}).$$

* В задачах от 7—24 считаем $\angle \alpha$ острым.

16. Дано: $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\sqrt{8}$. Найти:
 $\sin(\alpha - 90^\circ)$; $\cos(\alpha + 180^\circ)$; $\operatorname{tg}(\alpha - 270^\circ)$; $\operatorname{ctg}(-\alpha - 270^\circ)$;
 $\sec(90^\circ - \alpha)$; $\operatorname{cosec}(270^\circ + \alpha)$.

17. Дано: $\operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) = -0.5$. Найти:
 $\sin(90^\circ - \alpha)$; $\cos(360^\circ - \alpha)$; $\operatorname{tg}(-\alpha - 90^\circ)$; $\operatorname{ctg}(\alpha + 90^\circ)$;
 $\sec(-\alpha + 180^\circ)$; $\operatorname{cosec}(\alpha - 270^\circ)$.

18. Дано: $\operatorname{tg}(\alpha - 360^\circ) = \frac{2}{3}$. Найти:
 $\sin(\alpha - 180^\circ)$; $\cos(\alpha - 450^\circ)$; $\operatorname{tg}(-\alpha - 180^\circ)$; $\operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha)$;
 $\sec(\alpha + 270^\circ)$; $\operatorname{cosec}(-\alpha - 360^\circ)$.

19. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = 1\frac{1}{2}$. Найти:
 $\sin(-\alpha - 270^\circ)$; $\cos(\alpha + 180^\circ)$; $\operatorname{tg}(270^\circ - \alpha)$; $\operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha)$;
 $\sec(\alpha + 90^\circ)$; $\operatorname{cosec}(-180^\circ - \alpha)$.

20. Дано: $\operatorname{ctg}(\alpha - 90^\circ) = -5$. Найти:
 $\sin(540^\circ + \alpha)$; $\cos(180^\circ - \alpha)$; $\operatorname{tg}(\alpha - 270^\circ)$; $\operatorname{ctg}(\alpha - 90^\circ)$;
 $\sec(270^\circ + \alpha)$; $\operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha)$.

21. Дано: $\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \sqrt{24}$. Найти:
 $\sin(-\alpha - 180^\circ)$; $\cos(90^\circ - \alpha)$; $\operatorname{tg}(900^\circ - \alpha)$; $\operatorname{ctg}(\alpha - 90^\circ)$;
 $\sec(-\alpha - 270^\circ)$; $\operatorname{cosec}(270^\circ - \alpha)$.

22. Дано: $\operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha) = 0.8$. Найти:
 $\sin(\alpha + 180^\circ)$; $\cos(450^\circ - \alpha)$; $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$; $\operatorname{ctg}(\alpha - 90^\circ)$;
 $\sec(-\alpha - 360^\circ)$; $\operatorname{cosec}(270^\circ + \alpha)$.

23. Дано: $\sec(180^\circ + \alpha) = -\sqrt{3}$. Найти:
 $\sin(360^\circ - \alpha)$; $\cos(\alpha + 720^\circ)$; $\operatorname{tg}(-270^\circ - \alpha)$; $\operatorname{ctg}(\alpha - 180^\circ)$;
 $\sec(\alpha - 90^\circ)$; $\operatorname{cosec}(\alpha - 270^\circ)$.

24. Дано: $\operatorname{cosec}(270^\circ - \alpha) = -1.25$. Найти:
 $\sin(-\alpha - 810^\circ)$; $\cos(\alpha - 180^\circ)$; $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$; $\operatorname{ctg}(-\alpha - 180^\circ)$;
 $\sec(360^\circ - \alpha)$; $\operatorname{cosec}(\alpha + 270^\circ)$.

Найти (25 — 55):

25. $\cos 225^\circ$.

26. $\sin 480^\circ$.

27. $\operatorname{tg} 330^\circ$.

28. $\operatorname{ctg} 855^\circ$.

29. $\operatorname{ctg} 300^\circ$.

30. $\sin 660^\circ$.

31. $\sec 210^\circ$.

32. $\operatorname{cosec} 240^\circ$.

33. $\operatorname{vers} 315^\circ$

34. $\sin \frac{4}{3}\pi$.

35. $\cos \frac{10}{3}\pi$.

36. $\operatorname{ctg} \frac{5}{4}\pi$

37. $\sin -150^\circ$.

38. $\operatorname{ctg} -225^\circ$.

39. $\operatorname{tg} -\frac{11}{3}\pi$.

40. $\sec -\frac{5}{6}\pi$.

41. $\operatorname{covers} -\frac{2}{3}\pi$.

42. $\cos -960^\circ$

43. $\sin(180^\circ - x) + 2 \cos 3x$ при $x = 315^\circ$.
 44. $4 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 4x + 2 \operatorname{tg} 5x$ при $x = 300^\circ$.
 45. $2 \sin(x - 90^\circ) + \cos(x - 180^\circ) - \sin(x - 360^\circ)$ при $x = 45^\circ$.
 46. $3 \sin 7x + \cos(-180^\circ - 5x)$ при $x = 135^\circ$.
 47. $\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x - \operatorname{sec} x$ при $x = \pi$.
 48. $4 \cos(2x - 270^\circ) - 3 \operatorname{tg}(-x + 60^\circ)$ при $x = -\frac{4}{3}\pi$.
 49. $[\operatorname{ctg} 90^\circ + 3x] + \operatorname{sec}(x - 255^\circ)^{-2}$ при $x = \frac{3}{4}\pi$.
 50. $\sin x + \cos 4x + \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} 4,5x$ при $x = 60^\circ$.
 51. $\frac{\operatorname{tg} 3x - 5 \operatorname{ctg}(x + 270^\circ)}{8 \sin(75^\circ + x)}$ при $x = 225^\circ$.

52. $\sin(180^\circ + x) \cos(360^\circ - x) \operatorname{ctg}(270^\circ - x)$ при $\operatorname{ctg} x = 0,2$.

53. $\frac{\sin(90^\circ + x) \operatorname{ctg}(180^\circ - x)}{\cos(270^\circ + x)}$ при $\cos x = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

54. $\sin\left[(4n + 1)\frac{\pi}{2} \pm x\right]$, гдѣ n цѣлое число и $\cos x = 0,48$.

55. $\operatorname{tg}\left[(4n + 3)\frac{\pi}{2} \pm x\right]$, гдѣ n цѣлое число и $\operatorname{tg} x = 2,25$.

Найти все величины выражений (56 — 61), гдѣ n цѣлое число:

56. $\sin \frac{n\pi}{4}$. 57. $\cos \frac{3n\pi}{2}$. 58. $\sin\left[\frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{6}\right]$.

59. $\operatorname{tg} \frac{n-2}{3}\pi$. 60. $\operatorname{ctg} \frac{2n+1}{3} \cdot 180^\circ$. 61. $\operatorname{sec} \frac{3n+2}{4}\pi$.

Упростить (62—66):

62. $\frac{n \sin \alpha \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha \cos(90^\circ - \alpha)}$ 63. $\frac{\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) \cos(270^\circ - \alpha) \cos(-\alpha)}{\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) \sin(270^\circ + \alpha)}$

64. $\frac{\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) \sin(90^\circ + \alpha) \operatorname{ctg} \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha) \operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)}$

65. $\frac{\sin(90^\circ + \alpha) \cos(90^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ + \alpha)} + \frac{\sin(180^\circ - \alpha) \cos(450^\circ + \alpha)}{\sin(180^\circ + \alpha)}$

66. $\frac{\sin(270^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(180^\circ - \beta)}{\operatorname{tg}(180^\circ + \beta) \cos(180^\circ - \alpha)} + \frac{\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) \sin(\gamma - 90^\circ)}{\cos(180^\circ - \gamma) \operatorname{tg}(\alpha)}$

67. Найти наименьшее положительное значение для x , когда

- a) $\sin x = -\sin 3^\circ 24'$; b) $\sin x = \cos 48^\circ 26' 47''$;
 c) $\cos x = -\cos 20^\circ$; d) $\cos x = -\sin 75^\circ 15'$;
 e) $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} 72^\circ 18' 35''$; f) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} 15^\circ 44'$;
 g) $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg} 56^\circ$; h) $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg} 30^\circ 6'$.

68. Найти величины для x , въ промежуткѣ отъ 0° до 1000° , удовлетворяющихъ уравненію: $\operatorname{tg} x = 1$.

69. Найти величины для x , въ промежуткѣ отъ 200° до 800° , удовлетворяющихъ уравненію: $\cos x = \frac{1}{2}$.

70. Найти величины для x , въ промежуткѣ отъ 0° до -420° , удовлетворяющихъ уравненію: $\sin x = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

71. Найти величины для x , въ промежуткѣ отъ -180° до -720° , удовлетворяющихъ уравненію: $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$.

Найти (72—86) общее выраженіе для x , когда:

72. $\sin x = 1$. 73. $\cos x = 1$. 74. $\operatorname{tg} x = -1$.

75. $\cos x = \sqrt{3}$. 76. $\cos x = -\frac{1}{2}$. 77. $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$.

78. $\operatorname{ctg}^2 x = 1$. 79. $\sec^2 x = 2$. 80. $\operatorname{cosec}^2 x = \frac{1}{3}$.

81. $\sin x = -\cos x$. 82. $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$. 83. $\sin^2 x = \sin^2 \alpha$.

84. $\cos^2 x = \cos^2 \alpha$. 85. $\cos^2 x = \sin^2 \alpha$. 86. $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 \alpha$.

Найти общее выраженіе для x , удовлетворяющее одновременно уравненіямъ (87—90):

87. $\cos x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ и $\sin x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$.

88. $\sin x = -\frac{1}{2}$ и $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

89. $\operatorname{tg} x = 1$ и $\operatorname{ctg} x = -1$.

90. $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ и $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Рѣшить уравненія (91—101):

91. $\sin 2x = \cos x$. 92. $\sin 2x = \sin x$.

93. $\sin 4x + \sin x = 0$. 94. $2 \sin x = \operatorname{tg} x$.

95. $\operatorname{ctg} x = 2 \cos x$. 96. $\sec x \cdot \operatorname{ctg} x = 2\sqrt{3}$

97. $3 \sin x = 2 \cos^2 x$. 98. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

99. $\sin(x - y) = \frac{1}{2}$ и $\cos(x + y) = \frac{1}{2}$.

100. $\frac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{2}$ и $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \sqrt{3}$. 101. $6 \operatorname{ctg}^2 x - 4 \cos^2 x = 1$.

102. Показать, что все углы, имѣющіе тотъ же синусъ и тотъ же косинусъ, какіе имѣетъ уголъ α , заключаются въ формулѣ: $2n\pi + \alpha$, гдѣ n цѣлое число.

103. Показать, что все углы, имѣющіе съ угломъ α одинаковій синусъ, заключаются въ формулѣ: $(2n + 1)\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

104. Показать, что все углы, имеющие съ угломъ α одинаковый косинусъ, заключаются въ формулѣ: $\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + (-1)^n\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.

Задачи на III отдѣль.

1. Найти $\sin(\alpha - 30^\circ)$, когда $\cos \alpha = 0,6^*$.
2. Найти $\cos(60^\circ - \alpha)$, когда $\sin \alpha = \sqrt{0,2}$.
3. Найти $\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)$, когда $\operatorname{tg} \alpha = 3$.
4. Найти $\cos(45^\circ + \alpha)$, когда $\operatorname{tg} \alpha = 5$.
5. Найти $\operatorname{tg}(135^\circ + \alpha)$, когда $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.
6. Найти $\operatorname{ctg}(\alpha - 240^\circ)$, когда $\cos \alpha = 0,4$.
7. Дано: $\sin \alpha = 0,6$ и $\sin \beta = 0,5$. Найти тригонометрическія величины для угловъ $\alpha + \beta$ и $\alpha - \beta$.
8. Дано: $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ и $\cos \beta = \frac{2}{3}$. Найти тригонометрическія величины для угловъ $\alpha + \beta$ и $\alpha - \beta$.
9. Дано: $\cos \alpha = \sqrt{0,6}$ и $\cos \beta = \sqrt{0,2}$. Найти тригонометрическія величины для угловъ $\alpha + \beta$ и $\alpha - \beta$.
10. Дано: $\operatorname{tg} \alpha = 3$ и $\operatorname{tg} \beta = 2$. Найти тригонометрическія величины для угловъ $\alpha + \beta$ и $\alpha - \beta$.
11. Дано: $\cos \alpha = 0,3$ и $\sin \beta = -0,4$, гдѣ $\angle \alpha$ принадлежать четвертой, а $\angle \beta$ — третьей четверти; найти: $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ и $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$.
12. Дано: $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ и $\cos \beta = -\frac{3}{4}$, гдѣ $\angle \alpha$ принадлежит второй четверти, а $\angle \beta$ — третьей; найти: $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ и $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$.
13. Дано: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ и $\operatorname{tg} \beta = -2$, гдѣ $\angle \alpha$ принадлежит третьей четверти, а $\angle \beta$ — четвертой. Найти: $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$ и $\sec(\alpha + \beta)$.
14. Найти $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, когда $\sin \alpha = 0,6$.
15. Найти $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, когда $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$.
16. Найти $\operatorname{tg} 2\alpha$, когда $\operatorname{tg} \alpha = 2 - \sqrt{3}$.
17. Найти $\operatorname{ctg} 2\alpha$, когда $\operatorname{ctg} \alpha = 8$.
18. Найти $\sin 3\alpha$, когда $\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$.
19. Найти $\cos 3\alpha$, когда $\cos \alpha = -0,2$.

*) Въ задачахъ отъ 1 до 10 вел. считаемъ $\angle \alpha$ и β острыми.

20. Найти $\operatorname{tg} 3\alpha$ и $\operatorname{ctg} 4\alpha$, когда $\operatorname{tg} \alpha = 5$.

21. Даны $\sin \alpha = 0,8$, где $\angle \alpha$ принадлежит второй четверти. Найти: $\sin 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{ctg} 3\alpha$ и $\sin 4\alpha$.

22. Даны $\cos \alpha = \sqrt{1/3}$, где $\angle \alpha$ принадлежит четвертой четверти. Найти: $\cos 2\alpha$, $\sin 3\alpha$, $\operatorname{tg} 3\alpha$, $\operatorname{ctg} 2\alpha$ и $\cos 4\alpha$.

23. Даны $\operatorname{tg} \alpha = 3$, где $\angle \alpha$ принадлежит третьей четверти. Найти $\sin 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\operatorname{tg} 4\alpha$, $\operatorname{ctg} 2\alpha$ и $\sec 2\alpha$.

24. Даны $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{8}$, где $\angle \alpha$ принадлежит второй четверти. Найти $\sin 3\alpha$, $\operatorname{tg} 3\alpha$, $\operatorname{ctg} 4\alpha$ и $\sec 2\alpha$.

25. Даны: $\sin \alpha = 0,5$ и $\sin \beta = 1/3$, где $\angle \alpha$ и β острые. Найти: $\sin(\alpha + 2\beta)$, $\cos(2\alpha - \beta)$ и $\operatorname{tg}(2\alpha + 2\beta)$.

26. Даны: $\operatorname{tg} \alpha = 1/7$ и $\operatorname{tg} \beta = 1/3$. Найти меньшую из величин для угла $\alpha + 2\beta$.

27. Даны: $2\alpha + \beta + 2\gamma = 180^\circ$ и $\operatorname{ctg}(\alpha + \gamma) = p$. Найти $\operatorname{tg} \beta$.

28. Даны: $\sin(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \gamma = \cos(\alpha + \beta)$. Найти величину $\alpha + \beta + \gamma$.

29. Найти $\sin \alpha$, когда $\sin 2\alpha = 1/\sqrt{2}$ и $\angle 2\alpha$ принадлежит второй четверти.

30. Найти $\cos \alpha$, когда $\cos 2\alpha = -0,68$ и $\angle 2\alpha$ принадлежит третьей четверти.

31. Найти $\operatorname{tg} \alpha$, $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, когда $\operatorname{tg} 2\alpha = -5/12$ и $\angle 2\alpha$ принадлежит третьей четверти.

32. Найти $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, когда $\operatorname{tg} 2\alpha = -21/7$ и $\angle 2\alpha$ принадлежит четвертой четверти.

Показать справедливость следующих равенств:

$$33. \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha + \sec 2\alpha. \quad 34. \frac{4 \operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2} = \sin 4\alpha.$$

$$35. \cos \alpha + \cos(120^\circ - \alpha) + \cos(120^\circ + \alpha) = 0.$$

$$36. \cos^2 \alpha + \cos^2(60^\circ - \alpha) + \cos^2(60^\circ + \alpha) = 3/2.$$

$$37. \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta.$$

$$38. \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta.$$

$$39. \sin 3\alpha \operatorname{cosec} \alpha - \cos 3\alpha \sec \alpha = 2.$$

$$40. 3 \sin \alpha - \sin 3\alpha = 2 \sin \alpha (1 - \cos 2\alpha).$$

$$41. \sec(45^\circ + \alpha) \sec(45^\circ - \alpha) = 2 \sec 2\alpha.$$

$$42. \frac{\cos \alpha - \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha. \quad 43. \frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha. \quad \therefore$$

$$44. \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$$

$$45. \frac{\sin \alpha + 2 \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\sin 3\alpha + 2 \sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha}$$

$$\neq 46. \frac{\sin \alpha \pm \sin n\alpha + \sin (2n-1)\alpha}{\cos \alpha \pm \cos n\alpha + \cos (2n-1)\alpha} = \operatorname{tg} n\alpha.$$

$$47. \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin(2\alpha + \beta)}{\sin \alpha} - 2 \cos(\alpha + \beta).$$

$$48. \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha - 45^\circ)}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha + 45^\circ)} = \sin 2\alpha.$$

$$49. \frac{\sin 3\alpha + \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha - \cos 3\alpha} = \frac{1 + 2 \sin 2\alpha}{1 - 2 \sin 2\alpha} \operatorname{tg}(\alpha - 45^\circ)$$

$$50. 4 \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ + \alpha) = \sin 3\alpha.$$

$$51. \sin 3(\alpha - 15^\circ) - 4 \cos(\alpha - 45^\circ) \cos(\alpha + 15^\circ) \sin(\alpha - 15^\circ).$$

$$52. \operatorname{cosec} 2\alpha + \operatorname{ctg} 4\alpha = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{cosec} 4\alpha.$$

$$53. \cos^2(\alpha - \beta) + \cos^2 \beta - 2 \cos(\alpha - \beta) \cos \alpha \cos \beta = \sin^2 \alpha.$$

$$54. \sin^2(\alpha - \beta) + \sin^2 \beta + 2 \sin(\alpha - \beta) \sin \beta \cos \alpha = \sin^2 \alpha.$$

$$55. \sin 3\alpha \sin^2 \alpha + \cos 3\alpha \cos^2 \alpha = \cos^2 2\alpha.$$

$$56. \cos^3 \alpha \cdot \frac{\sin 3\alpha}{3} + \sin^3 \alpha \cdot \frac{\cos 3\alpha}{3} = \frac{\sin 4\alpha}{4}$$

$$57. \cos n\alpha \cos(n+2)\alpha - \cos^2(n+1)\alpha + \sin^2 \alpha = 0.$$

$$58. \sin n\alpha \operatorname{cosec}^2 \alpha \sec^2 \alpha - \cos n\alpha \sec^2 \alpha \operatorname{cosec} \alpha = \\ = 4 \sin(n-1)\alpha \operatorname{cosec}^3 2\alpha.$$

$$H \quad 59. \cos 10\alpha + \cos 8\alpha + 3 \cos 4\alpha + 3 \cos 2\alpha = 8 \cos \alpha \cos^3 3\alpha.$$

$$60. \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 4\alpha = \operatorname{cosec} 4\alpha (2 + 2 \cos 2\alpha + 3 \cos 4\alpha).$$

$$61. \sin \alpha \sin(\beta - \gamma) + \sin \beta \sin(\gamma - \alpha) + \sin \gamma \sin(\alpha - \beta) = 0.$$

$$62. \cos \alpha \sin(\beta - \gamma) + \cos \beta \sin(\gamma - \alpha) + \cos \gamma \sin(\alpha - \beta) = 0.$$

$$63. \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma) =$$

$$= 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Показать, что

$$64. \sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha) + \\ + 4 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\beta - \gamma}{2} \sin \frac{\gamma - \alpha}{2} = 0.$$

$$65. \sin(\alpha + \beta) \cos \beta - \sin(\alpha + \gamma) \cos \gamma = \sin(\beta - \gamma) \cos(\alpha + \beta + \gamma).$$

$$66. \cos(\alpha + \beta + \gamma) + \cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\alpha + \gamma - \beta) + \\ + \cos(\beta + \gamma - \alpha) = 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

$$67. \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 4 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \gamma) \cos(\beta + \gamma) + \\ - \cos 2(\alpha + \beta + \gamma).$$

$$68. \cos(\alpha + \beta)\sin\beta - \cos(\alpha + \gamma)\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)\cos\beta + \\ - \sin(\alpha + \gamma)\cos\gamma.$$

$$69. \sin(\alpha + \beta + \gamma)\sin\beta = \sin(\alpha + \beta)\sin(\beta + \gamma) - \sin\alpha\sin\gamma.$$

$$70. \sin(\delta - \beta)\sin(\alpha - \gamma) + \sin(\beta - \gamma)\sin(\alpha - \delta) + \\ + \sin(\gamma - \delta)\sin(\alpha - \beta) = 0.$$

Дано $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$; показать въ примѣрахъ отъ 71 до 87 включительно, что

$$71. \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}.$$

$$72. \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

$$73. \sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

$$74. \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

$$75. \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} = 4 \cos \frac{\beta + \gamma}{4} \cos \frac{\alpha + \gamma}{4} \cos \frac{\alpha + \beta}{4}.$$

$$76. \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

$$77. \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 4 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma + 1 = 0.$$

$$78. \cos 4\alpha + \cos 4\beta + \cos 4\gamma + 1 = 4 \cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma.$$

$$79. \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} = 4 \cos \frac{\pi - \alpha}{4} \cos \frac{\pi - \beta}{4} \cos \frac{\pi - \gamma}{4}.$$

$$80. \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} = 4 \cos \frac{\pi + \alpha}{4} \cos \frac{\pi - \beta}{4} \cos \frac{\pi + \gamma}{4}.$$

$$81. \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} - 1 = 4 \sin \frac{\pi - \alpha}{4} \sin \frac{\pi - \beta}{4} \sin \frac{\pi - \gamma}{4}.$$

$$82. \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = 2.$$

$$83. \sin^2 2\alpha + \sin^2 2\beta + \sin^2 2\gamma + 2 \cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma = 2.$$

$$84. \frac{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}.$$

$$85. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1.$$

$$86. \sin n\alpha + \sin n\beta + \sin n\gamma - 4 \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\alpha}{2} \cos \frac{n\beta}{2} \cos \frac{n\gamma}{2}, \text{ если}$$

n чѣлое и вида: $4m + 1$ или $4m + 3$.

$$87. \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} + \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma} + \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma} + \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta} + \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = \sec\alpha \sec\beta \sec\gamma - 2.$$

Опредѣлить величину x изъ уравненій:

$$88. \sqrt{3} \sin x = \sin 2x. \quad 89. \cos 2x = \cos x - 1.$$

$$90. \sin 3x = 2 \sin x. \quad 91. \operatorname{tg} 2x = 3 \operatorname{tg} x.$$

$$92. \operatorname{tg} x = \operatorname{cosec} 2x. \quad 93. 5 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x.$$

Данные уравненія (94—104) замѣнить простѣйшими:

$$94. \sin(x+a) + \cos(x-a) = b. \quad 95. \sin(45^\circ+x) \cos(45^\circ-x) = 1/2.$$

$$96. a(\cos x - \sin x)^2 = b \sin 2x. \quad 97. a \operatorname{ctg} 2x = b(1 + \operatorname{tg} x).$$

$$98. a(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x) = b(1 - \sin 2x) : \sin 2x.$$

$$99. a(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x) = b \cos 2x : (1 - \cos 2x).$$

$$100. a(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = b \operatorname{ctg} 2x. \quad 101. \sin^2 x - 2 \cos^2 x + 1/2 \sin 2x = 0.$$

$$102. \operatorname{cosec} x : (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = d(\operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x).$$

$$103. m(1 + \operatorname{ctg} x) : (\sin x + \cos x) = n(\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x).$$

$$104. 2 \operatorname{ctg}^3 x = b(1 + \operatorname{ctg}^2 x) \cdot (1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} 2x).$$

Опредѣлить x изъ уравненій:

$$105. \cos x - \cos 3x = \sin 2x. \quad 106. \cos x - \cos 2x = \sin 3x.$$

$$107. \cos x + \cos 7x = \cos 4x. \quad 108. \sin 7x = \sin x - \sin 3x.$$

$$109. \cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0.$$

$$110. \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0.$$

$$111. \sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0.$$

$$112. \sin x + \sin 3x = \sin 2x + \sin 4x.$$

$$113. \sin x - \cos x = 2\sqrt{2} \sin x \cos x. \quad 114. \sin x - \cos x = 4 \sin x \cos^2 x.$$

$$115. 2 \sin^3 x + \sin^3 2x = 2. \quad 116. \sin^2 2x - \sin^2 x = \sin^2 \frac{\pi}{6}.$$

$$117. \operatorname{tg} 2x - 8 \cos^2 x - \operatorname{ctg} x. \quad 118. \sin x \sin 3x = 1/2.$$

$$119. \cos x \cos 3x = \cos 5x \cos 7x. \quad 120. \sin 5x = 16 \sin^3 x.$$

$$121. 4 \sin x \sin(x-\alpha) = 2 \cos \alpha - 1.$$

$$122. \sin(x+\alpha) + \cos(x+\alpha) = \sin(x-\alpha) + \cos(x-\alpha).$$

$$123. \sin \alpha + \sin(x-\alpha) + \sin(2x+\alpha) = \sin(x+\alpha) + \sin(2x-\alpha).$$

$$124. (1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x.$$

$$125. 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)(1 + \sin x) = 1 + \cos 2x$$

$$126. \sin 9x + \sin 5x + 2 \sin^2 x = 1.$$

$$127. \operatorname{tg}(\alpha+x) \operatorname{tg}(\alpha-x) = \frac{1 - 2 \cos 2\alpha}{1 + 2 \cos 2\alpha}.$$

$$128. \text{Изъ уравненій: } u = 3v, \operatorname{tg} u = x+1, \operatorname{tg} v = x-1, \text{ найти } x.$$

129. Определить уголъ, котораго синусъ равенъ половинѣ косинуса искомаго угла.

130. Опредѣлить наименьшую величину для x , удовлетворяющую уравненію: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \left(\frac{8\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

131. Опредѣлить $\operatorname{tg} x$ изъ уравненія: $\sin x = \sin \alpha \sin(\beta + x)$.

132. Опредѣлить $\operatorname{tg} x$ изъ уравненія: $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2$.

133. Опредѣлить $\sin x$ изъ уравненія: $a \cos x = b \sin(\alpha - x)$.

134. Опредѣлить $\sin x$ и $\sin y$ изъ уравненій:

$$x + y = \alpha \text{ и } \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{m}{n}.$$

135. Опредѣлить x изъ уравненія: $\cos \beta \sqrt{a^2 - x^2} + a \sin \alpha = x \sin \beta$.

136. Опред. x изъ уравн.: $\cos(x + \frac{3}{2})\alpha + \cos(x + \frac{1}{2})\alpha = \sin \alpha$.

137. Опредѣлить $\sin x$ изъ уравн.: $a \sin(\alpha - x) = b \cos(\beta + x)$.

138. Опредѣлить $\operatorname{tg} x$ изъ уравненія: $\frac{m}{n} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos(\beta + x)}{\sin \beta \cdot \cos(\alpha - x)}$.

139. Опред. $\operatorname{tg}(\alpha - 2x)$ изъ уравн.: $\frac{m \operatorname{tg}(\alpha - x)}{\cos^2 x} = \frac{n \operatorname{tg} x}{\cos^2(\alpha - x)}$.

140. Опредѣлить $\operatorname{tg} x$ изъ уравн.: $\operatorname{tg}(\alpha - x) + \operatorname{tg}(\alpha + x) = a$.

141. Опред. $\operatorname{tg} x$ изъ уравненій: $x + y = \alpha$ и $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a$.

142. Найти $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} y$ изъ уравненій:

$$\operatorname{tg}(x + y) = a \text{ и } \operatorname{tg}(x - y) = b.$$

143. Найти $\sin x$ и $\sin y$ изъ уравненій:

$$\sin(x + y) = a \text{ и } \sin(x - y) = b.$$

144. Найти $\cos x$ и $\cos y$ изъ уравненій:

$$\cos(x + y) = a \text{ и } \cos(x - y) = b.$$

145. Опредѣлить x изъ уравненія:

$$x^2 \cos \alpha \cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) + x \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \frac{\beta}{2}.$$

146. Опредѣлить x изъ уравненія:

$$\operatorname{ctg} 2^{2^{-1}} \alpha - \operatorname{ctg} 2^x \alpha = \operatorname{cosec} 3^z \alpha.$$

147. Опредѣлить $\cos x$ изъ уравненія:

$$\cos^2(\alpha + x) + \cos^2(\alpha - x) = a.$$

148. Опредѣлить $\cos x$ изъ уравненія:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^2(\alpha + x) - \operatorname{tg}^2(\alpha - x).$$

149. Опредѣлить $\cos x$ изъ уравненій:

$$\frac{\sin x}{\sin \alpha} = \frac{\sin y}{\sin \beta} = \frac{\sin z}{\sin \gamma} \text{ и } x + y + z = 2\pi.$$

150. Дано: $\sin^2(n+1)x = \sin^2 nx + \sin^2(n-1)x$, гдѣ $(n+1)x$, nx и $(n-1)x$ суть углы треугольника; найти цѣлое значеніе для n .

151. Опредѣлить x изъ уравненія:

$$\cos^2 x - \cos^2 \alpha = 2 \cos^2 x (\cos x - \cos \alpha) - 2 \sin^2 x (\sin x - \sin \alpha).$$

152. Если $\operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{tg} x)$, то существенныя значенія x опредѣляются изъ уравненія: $\sin 2x = \frac{4}{(2n+1)\pi}$, гдѣ n цѣлое число, за исключеніемъ $n = 0$ и $n = 1$.

153. Найти тригонометрическія величины для угла $\frac{1}{2}\alpha$, когда $\cos \alpha = 0,48$ и $\angle \alpha$ принадлежитъ первой четверти.

154. Найти тригонометрическія величины для угла $\frac{1}{2}\alpha$, когда $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ и $\angle \alpha$ принадлежитъ третьей четверти.

155. Найти $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, когда $\cos \alpha = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$.

156. Найти тригонометрическія величины для угла $\frac{1}{2}\alpha$, когда $\sin \alpha = 0,6$ и $\angle \alpha$ принадлежитъ второй четверти.

157. Найти тригонометрическія величины для угла $\frac{1}{2}\alpha$, когда $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ и $\angle \alpha$ принадлежитъ четвертой четверти.

158. Найти тригонометрическія величины для угла $\frac{1}{2}\alpha$, когда $\operatorname{tg} \alpha = 7$ и $\angle \alpha$ принадлежитъ третьей четверти.

159. $\sin \frac{\alpha}{2} = 0,4$; опредѣлить: $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$.

160. $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$; опредѣлить: $\operatorname{ctg} \alpha$ и $\operatorname{cosec} \alpha$.

161. Найти тригонометрическія величины для угла α , когда $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{26} - 5$ и $\angle \alpha$ принадлежитъ первой четверти.

162. Опредѣлить: $\sin 7^\circ 30'$, $\cos 7^\circ 30'$ и $\operatorname{tg} 7^\circ 30'$.

163. Опредѣлить: \sin , \cos и ctg угла въ $67^\circ 30'$.

164. Найти $\sin 3^\circ$ и $\cos 3^\circ$.

165. Показать, что $\operatorname{tg} 142^\circ 30' = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}$.

166. Показать, что $2 \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha}$, когда α заключается между 405° и 495° .

167. Опредѣлить $\sin \frac{\alpha}{2}$ въ зависимости отъ $\sin \alpha$, когда $\frac{\alpha}{2}$ заключается между -45° и -135° .

168. Опредѣлить такіе предѣлы для угла α , чтобы

$$2 \sin \alpha = -\sqrt{1 + \sin 2\alpha} + \sqrt{1 - \sin 2\alpha},$$

$$2 \cos \alpha = -\sqrt{1 + \sin 2\alpha} - \sqrt{1 - \sin 2\alpha}.$$

169. Опредѣлить такіе предѣлы для угла α , чтобы

$$2 \cos \alpha = -\sqrt{1 + \sin 2\alpha} + \sqrt{1 - \sin 2\alpha}.$$

170. Опредѣлить такіе предѣлы для угла α , чтобы

$$2 \sin \alpha = \sqrt{1 + \sin 2\alpha} - \sqrt{1 - \sin 2\alpha}.$$

171. Возьмемъ окружность, которой центръ O , и проведемъ діаметръ AB ; изъ какойнибудь точки P , взятой на окружности, опустимъ перпендикуляръ PM на діаметръ AB и соединимъ прямыми точку P съ точками A и B . Замѣтивъ, что углы BPM и PAM равны половинѣ угла POM , доказать, изъ чертежа, что

$$\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Опредѣлить x изъ уравненій (172—176):

172. $a(1 + \cos x) = b \cos \frac{x}{2}$. 173. $\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} \frac{x}{2}$.

174. $a(1 - \cos x) = b \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. 175. $\operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2} - \sec^2 \frac{x}{2} = 2\sqrt{3} \operatorname{cosec}^2 x$.

176. $\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} 2x = \sin x (1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2})$.

177. Опредѣлить $\operatorname{tg} x$ изъ уравненія: $\operatorname{tg} x = (2 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} \frac{x}{3}$.

178. Опредѣлить $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ изъ уравненія: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x + c - 1}{\operatorname{tg} x + c + 1}$.

Показать, что

179. $\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\operatorname{vers} \alpha}}$.

180. $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}$. 181. $\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\sec \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$.

182. $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} (1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}) = (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2})^2$.

183. $\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha}{\sin \alpha} = \left(1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)$.

184. $\sqrt{1 + \sin \alpha} = 1 + 2 \sin \frac{\alpha}{4} \sqrt{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}$.

185. Если $\cos x = \frac{a \cos \varphi - b}{a - b \cos \varphi}$, то $\operatorname{tg} \frac{x}{2} : \sqrt{a+b} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} : \sqrt{a-b}$.

186. Если $\sec(\varphi + \alpha) + \sec(\varphi - \alpha) = 2 \sec \varphi$, то $\cos \varphi = \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}$.

187. Если $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \left(\frac{1+c}{1-c} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, то $\cos x = \frac{\cos \varphi - c}{1 - c \cos \varphi}$.

188. Если α, β, γ составляют арифметическую прогрессию, то $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin(\beta - \gamma)} = 2 \cos 2\beta$.

189. Если $\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \alpha} = 1$, то $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \gamma$.

190. Если $\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{\cos \beta (\cos x - \cos \alpha)}{\cos \alpha (\cos x - \cos \beta)}$, то $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}$.

191. Если $\cos \alpha = \cos \beta \cos \psi = \cos \beta' \cos \psi'$ и $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\psi'}{2}$, то $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\beta'}{2}$.

192. $\sin(\alpha - \beta) : \sin x = \sin(\alpha + x) : \sin \beta$, то $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg}(\alpha + x) + \operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$.

193. Если $\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin x} - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} x} \right)^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta$, то $\cos x = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$.

194. Если $\operatorname{tg} \psi = \cos x \operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} x \sin \psi$, то одна изъ величинъ $\operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2}$ есть $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha + \alpha'}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha - \alpha'}{2}$.

195. Если $\sin(\beta + \gamma - \alpha)$, $\sin(\alpha + \gamma - \beta)$ и $\sin(\alpha + \beta - \gamma)$ будутъ составлять арифметическую прогрессию, то $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$ и $\operatorname{tg} \gamma$ будутъ также составлять арифметическую прогрессию.

196. Если синусы угловъ треугольника составляютъ арифметическую прогрессию, то и котангенсы половинъ этихъ угловъ составляютъ также арифметическую прогрессию.

197. Если α, β и γ углы треугольника и $\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) = n \sin \frac{\gamma}{2}$, то $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{n-1}{n+1}$.

198. Если $\frac{\sin(\vartheta - \alpha)}{\sin(\vartheta - \beta)} = \frac{a}{b}$ и $\frac{\cos(\vartheta - \alpha)}{\cos(\vartheta - \beta)} = \frac{a'}{b'}$, то $\cos(\alpha - \beta) = \frac{aa' + bb'}{ab' + a'b}$.

199. Дано: $\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta'}{\sin \vartheta' + \cos \vartheta}$; показать, что одна изъ величинъ

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \text{ есть } \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta'}{2} \right).$$

Исключить x изъ уравнений (200—204):

200. $\operatorname{cosec} x - \sin x = m, \sec x - \cos x = n.$

201. $\sin x + \cos x = m, \sec x + \operatorname{cosec} x = n.$

202. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = m, \sec x + \operatorname{cosec} x = n.$

203. $\sin x + \cos x = m, \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x = n.$

204. $\sin x + \cos x = m, \sin^2 x + \cos^2 x = n.$

205. Исключить ϑ изъ уравнений:

$$x \sin \vartheta - y \cos \vartheta = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ и } \frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{b^2} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

206. Исключить ϑ изъ уравнений:

$$(a + b) \operatorname{tg} (\vartheta - \psi) = (a - b) \operatorname{tg} (\vartheta + \psi) \text{ и } a \cos 2\vartheta + b \cos 2\psi = c.$$

207. Если $\cos \vartheta = \cos \alpha \cos \beta, \cos \vartheta' = \cos \alpha' \cos \beta'$ и

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \operatorname{tg} \frac{\vartheta'}{2} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \text{ то } \sec^2 \beta = (\sec \alpha - 1)(\sec \alpha' - 1).$$

208. Чтобы выраженіе:

$$\begin{aligned} & A \cos (\vartheta + \alpha) + B \sin (\vartheta + \beta) \\ & A' \sin (\vartheta + \alpha) + B' \cos (\vartheta + \beta) \end{aligned}$$

имѣло ту-же величину при всѣхъ значеніяхъ ϑ , необходимо, чтобы

$$AA' - BB' = (A'B - AB') \sin (\alpha - \beta).$$

209. Найти условіе, при которомъ одна и та-же величина ϑ удовлетворяетъ уравненіямъ:

$$a \sec^2 \vartheta - b \cos \vartheta = 2a \text{ и } b \cos^2 \vartheta - a \sec \vartheta = 2b.$$

210. Исключить ϑ и ψ изъ уравнений:

$$\sin \vartheta + \sin \psi = a, \cos \vartheta + \cos \psi = b \text{ и } \cos (\vartheta - \psi) = c.$$

211. Исключить ϑ и ψ изъ уравнений:

$$\operatorname{tg} \vartheta + \operatorname{tg} \psi = a, \operatorname{ctg} \vartheta + \operatorname{ctg} \psi = b \text{ и } \vartheta + \psi = c.$$

212. Исключить ϑ и ψ изъ уравнений:

$$x \cos \vartheta + y \sin \vartheta = a, x \cos (\vartheta + 2\psi) - y \sin (\vartheta + 2\psi) = a \text{ и } b \sin (\vartheta + \psi) = a \sin \psi.$$

213. Исключить ϑ изъ уравнений:

$$\frac{x}{a} = \frac{\sec^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta}{\sec^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta} \text{ и } \frac{2b}{y} = \sec^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta.$$

214. Исключить ϑ и ψ изъ уравнений:

$$\cos \vartheta = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \quad \cos \psi = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \quad \text{и} \quad \cos(\vartheta - \psi) = \sin \beta \sin \gamma.$$

215. Если $\frac{\cos x}{a_1} = \frac{\cos 2x}{a_2} = \frac{\cos 3x}{a_3}$, то $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{2a_3 - a_1 - a_2}{4a_2}$.

216. Если $\frac{\sin x}{a_1} = \frac{\sin 3x}{a_2} = \frac{\sin 5x}{a_3}$, то $\frac{a_1 - 2a_3 + a_2}{a_3} = \frac{a_1 - 3a_1}{a_1}$.

217. Если $\frac{\cos x}{a_1} = \frac{\cos(x + \vartheta)}{a_2} = \frac{\cos(x + 2\vartheta)}{a_3} = \frac{\cos(x + 3\vartheta)}{a_4}$, то

$$\frac{a_1 + \frac{a_3}{a_2}}{a_2} = \frac{a_2 + \frac{a_4}{a_3}}{a_3}.$$

218. Если $\sin^2 \psi = \frac{\cos 2\alpha \cos 2\alpha'}{\cos^2(\alpha + \alpha')}$, то

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha \right) : \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha' \right).$$

Задачи на IV отдѣль.

Найти предѣлы выражений (1—13), когда α уменьшается до нуля:

1. $\frac{\operatorname{vers} \alpha}{\alpha \sin \alpha}$ 2. $\frac{\sin m \alpha}{\sin n \alpha}$ 3. $\frac{\operatorname{tg} m \alpha}{\operatorname{tg} n \alpha}$ 4. $\frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{1 - \operatorname{ctg} \alpha}$

5. $\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\sec 2\alpha - 1}$ 6. $\frac{\sin \frac{1}{2} \alpha \cdot \cos 2\alpha}{\operatorname{vers} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha}$ 7. $\frac{\sin 4\alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{vers} 2\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 2\alpha}$

8. $\frac{\sin(a + \alpha) - \sin \alpha}{\alpha}$ 9. $\frac{\cos(a + \alpha) - \cos \alpha}{\alpha}$

10. $\frac{\operatorname{tg}(a + \alpha) - \operatorname{tg} \alpha}{\alpha}$ 11. $\frac{\operatorname{ctg}(a + \alpha) - \operatorname{ctg} \alpha}{\alpha}$

12. $\frac{\sec(a + \alpha) - \sec \alpha}{\alpha}$ 13. $\frac{\operatorname{cosec}(a + \alpha) - \operatorname{cosec} \alpha}{\alpha}$

14. Найти величину $(1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ при $x = 1$.

15. Найти величину $\frac{\sin(\omega - 60^\circ)}{4 \cos^2 \omega - 1}$ при $\omega = 60^\circ$.

Задачи на VI отдѣль.

Задачи на вычисления по семизначнымъ таблицамъ логарифмовъ Вега.

Найти по III таблицѣ:

1. $\lg \sin 17^\circ 25' 26''$. 2. $\lg \sin 68^\circ 38''$. 3. $\lg \sin 24^\circ 24' 52''$, 8.
4. $\lg \sin 54^\circ 48' 40''$, 29. 5. $\lg \sin 8^\circ 26' 0''$, 09. 6. $\lg \cos 27^\circ 24''$.

7. $\lg \cos 74^{\circ}39'42''$. 8. $\lg \cos 40^{\circ}54'18''$, 7. 9. $\lg \cos 62^{\circ}32'48$.
 10. $\lg \cos 37^{\circ}8'20''$, 35. 11. $\lg \tg 12^{\circ}15'24''$. 12. $\lg \tg 40^{\circ}49'6''$, 4.
 13. $\lg \tg 70^{\circ}7'43''$, 24. 14. $\lg \tg 52^{\circ}3'17''$, 46. 15. $\lg \tg 20^{\circ}30''$, 2.
 16. $\lg \ctg 23^{\circ}36''$. 17. $\lg \ctg 59^{\circ}16'23''$, 5. 18. $\lg \ctg 40^{\circ}59'32''$, 76.
 19. $\lg \ctg 77^{\circ}44''$, 06. 20. $\lg \ctg 1^{\circ}28'4''$, 3. 21. $\lg \sec 38^{\circ}42'39''$, 7.
 22. $\lg \operatorname{cosec} 52^{\circ}4''$, 15. 23. $\lg \sin 164^{\circ}47'32''$, 17. 24. $\lg \sin 300^{\circ}29''$, 4.
 25. $\lg \cos 92^{\circ}5'46''$, 08. 26. $\lg \cos 290^{\circ}52'17''$, 24.
 27. $\lg \tg 100^{\circ}34'24''$, 52. 28. $\lg \ctg 186^{\circ}54'8''$, 91.

Найти x , когда *)

29. $\lg \sin x = 9,6168848$. 30. $\lg \sin x = 9,8829500$.
 31. $\lg \sin x = 9,9536891$. 32. $\lg \sin x = 8,2811012$.
 33. $\lg \sin x = 9$. 34. $\lg \cos x = 9,9814662$.
 35. $\lg \cos x = 9,7241328$. 36. $\lg \cos x = 9,3853129$.
 37. $\lg \cos x = 9,9084594$. 38. $\lg \cos x = 9,8489632$.
 39. $\lg \tg x = 9,7688812$. 40. $\lg \tg x = 0,1918513$.
 41. $\lg \tg x = 9,9998654$. 42. $\lg \tg x = 1,6600007$.
 43. $\lg \tg x = 8,7038265$. 44. $\lg \ctg x = 0,2174324$.
 45. $\lg \ctg x = 9,9304766$. 46. $\lg \ctg x = 0,5356674$.
 47. $\lg \ctg x = 9,3116417$. 48. $\lg \ctg x = 2,2105176$.
 49. $\lg \sec x = 0,0060322$. 50. $\lg \csc x = 1,0000973$.

Найти по II таблицѣ логарифмовъ Вера (51—70):

51. $\lg \sin 4^{\circ}17'36''$. 52. $\lg \sin 1^{\circ}36'8''$, 096. 53. $\lg \sin 29^{\circ}41''$, 377.
 54. $\lg \cos 87^{\circ}49'42''$. 55. $\lg \cos 86^{\circ}30''$, 72. 56. $\lg \tg 1^{\circ}54'42''$.
 57. $\lg \tg 4^{\circ}32'6''$, 3. 58. $\lg \tg 15^{\circ}0''$, 0746. 59. $\lg \ctg 89^{\circ}16'35''$, 8.
 60. $\lg \ctg 87^{\circ}46''$, 19.

Найти x , когда

61. $\lg \sin x = 8,8742655$. 62. $\lg \sin x = 8,4465507$.
 63. $\lg \sin x = 8,5457211$. 64. $\lg \cos x = 8,5785665$.
 65. $\lg \cos x = 8,2549090$. 66. $\lg \cos x = 7,7425895$.
 67. $\lg \tg x = 8,5234507$. 68. $\lg \tg x = 7,6398561$.
 69. $\lg \ctg x = 8,1012723$. 70. $\lg \ctg x = 8,7854461$.

Найти по таблицамъ Деламбра (71—88):

71. $\lg \sin 1^{\circ}28'34''$. 72. $\lg \sin 39^{\circ}46''$, 248. 73. $\lg \sin 52''$, 3078.
 74. $\lg \cos 89^{\circ}14'36''$, 4. 75. $\lg \cos 88^{\circ}29''$, 17. 76. $\lg \tg 2^{\circ}26''$, 75.
 77. $\lg \tg 38^{\circ}30''$, 456. 78. $\lg \tg 40''$, 7086.
 79. $\lg \ctg 87^{\circ}49'24''$, 5. 80. $\lg \ctg 88^{\circ}5'16''$, 54.

*) Здѣсь даны табличные логарифмы.

Найти x , когда

81. $\lg \sin x = 8,4109485$ 82. $\lg \sin x = 7,6437036$.

83. $\lg \cos x = 8,1207056$. 84. $\lg \cos x = 6,2911385$.

85. $\lg \operatorname{tg} x = 8,5045224$. 86. $\lg \operatorname{tg} x = 6,2952611$.

87. $\lg \operatorname{ctg} x = 8,5235428$. 88. $\lg \operatorname{ctg} x = 8,2386408$.

Найти:

89. $\sin 41^{\circ}49'16''$. 90. $\sin 79^{\circ}48',7$. 91. $\cos 58^{\circ}56'39''$.

92. $\cos 27^{\circ}34'9'',4$. 93. $\operatorname{tg} 25^{\circ}27'23''$. 94. $\operatorname{tg} 82^{\circ}50',46$.

95. $\operatorname{ctg} 17^{\circ}48'29'',18$. 96. $\operatorname{ctg} 85^{\circ}56'7'',07$. 97. $\operatorname{sec} 59^{\circ}0'',44$.

98. $\operatorname{cosec} 65^{\circ}16'',74$. 99. $\sin 147^{\circ}46'3'',19$. 100. $\cos 212^{\circ}0'',58$.

101. $\operatorname{tg} 312^{\circ}19'18'',08$. 102. $\operatorname{ctg} 110^{\circ}47'39'',7$. 103. $\sin 1000^{\circ}25'27''$.

104. $\cos 821^{\circ}39',18$. 105. $\operatorname{tg} 564^{\circ}51'2'',47$. 106. $\operatorname{ctg} 944^{\circ}0'',75$.

Найти наименьшую положительную величину x (107—124)

107. $\sin x = 0,726$. 108. $\sin x = \frac{148}{317}$. 109. $\sin x = 1,8$.

110. $\cos x = 0,62$. 111. $\cos x = \frac{17}{35}$. 112. $\operatorname{tg} x = 5,62$.

113. $\operatorname{tg} x = 10\frac{19}{42}$. 114. $\operatorname{tg} x = 0,820498$. 115. $\operatorname{ctg} x = 70$.

116. $\operatorname{ctg} x = 0,0446$. 117. $\operatorname{sec} x = 1,22$. 118. $\operatorname{cosec} x = 3$.

119. $\sin x = -0,575$. 120. $\cos x = -\frac{15}{47}$. 121. $\operatorname{tg} x = -1,7$.

122. $\operatorname{ctg} x = -3\frac{4}{7}$. 123. $\operatorname{sec} x = -1,8$. 124. $\operatorname{cosec} x = -10$.

Найти всё величины для угла x , въ промежуткѣ отъ 0° до 360° ,

когда

125. $\sin x = -0,47$. 126. $\cos x = \frac{15}{49}$. 127. $\operatorname{tg} x = -5$.

128. $\operatorname{ctg} x = 0,7234$. 129. $\operatorname{sec} x = -3$. 130. $\operatorname{cosec} x = 4,35$.

Найти всё величины для угла x отъ 180° до 540° , когда

131. $\sin x = 0,7$. 132. $\cos x = -0,912$. 133. $\operatorname{tg} x = \frac{92}{45}$.

134. $\operatorname{ctg} x = -10$. 135. $\operatorname{sec} x = 8,2$. 136. $\operatorname{cosec} x = -4$.

Найти:

137. $42 \sin 38^{\circ}59'36'',78$. 138. $0,049 \operatorname{ctg} 40^{\circ}47'48'',09$.

139. $\operatorname{ctg} 72^{\circ}16'22'',4$
0,948686 140. $\sin 48^{\circ}29',36$
12,1764 141. $\operatorname{tg} 28^{\circ}29'37'',45$
1,06 $\cos 61^{\circ}24''$

142. $2,65 \operatorname{ctg} 85^{\circ}54',37$
 $\sin 40^{\circ}47'30'',28$ 143. $0,568 \cdot \cos 34^{\circ}50',42$
 $\operatorname{tg} 59^{\circ}48'27''$

144. $(\operatorname{tg} 44^{\circ}49'52'',06)^{12}$. 145. $(\cos 39^{\circ}39'14'',22)^{0,86}$.

146. $(\operatorname{ctg} 25^{\circ}15'7'',28)^{-1,08}$. 147. $\sqrt[36]{\operatorname{ctg} 51^{\circ}59'52'',06}$.

148. $\sqrt{\sin 200^{\circ}16''}$, 28. 149. $(\operatorname{tg} 42^{\circ}42'42'',71)^{1,5} - 0,862$.
150. $1,7 + \sqrt{\operatorname{ctg} 64^{\circ}16'25'',6}$. 151. $(1,004 - \cos 59^{\circ}28'3'',17)^{-0,19}$.
152. $\sqrt{\operatorname{ctg} 40^{\circ}28'37'',08} - 1,171$. 153. $0,36 + (\operatorname{tg} 30^{\circ}35'40'',28)^{1,3}$.
154. $(\operatorname{cosec} 16^{\circ}16'',18 - 3,612)^{7,5}$. 155. $\sqrt{\operatorname{ctg} 36^{\circ}39'38'',4}^{-15}$.
156. $(\sqrt{\operatorname{tg} 325^{\circ}34'',19} + 1,001)^{0,04}$. 157. $0,28 (\cos 40^{\circ}40'36'',09)^{1,06}$.
158. $(1,4 \sin 4^{\circ}47'',184)^{-0,72}$.
159. $2,08 \sqrt{\operatorname{tg} 35^{\circ}16'30'',56}$. 160. $\sqrt{0,00014 \operatorname{ctg} 70^{\circ}2'',45}$.
161. $\frac{0,2452868}{(\cos 48^{\circ}4'4'',07)^{0,27}}$. 162. $\frac{0,002486872}{\sqrt{\operatorname{tg} 12^{\circ}49'49'',07}}$.
163. $\left(\frac{0,02068564}{\operatorname{tg} 44^{\circ}4'56'',29} \right)^{0,15}$. 164. $\sqrt{\frac{0,000001}{\cos 68^{\circ}26'24'',24}}$.
165. $\frac{\operatorname{tg} 20^{\circ}20'26'',56}{\sqrt{\cos 52^{\circ}56'17'',2}}$. 166. $\frac{7 \operatorname{sec} 15^{\circ}19'29'',42}{18 (\sin 58^{\circ}3'7'',0,076)}$.
167. $\frac{(\sin 15^{\circ}19'47'',12)^{1,3}}{\sqrt{\cos 59^{\circ}26'34'',7}}$. 168. $\frac{0,24 \sin 56^{\circ}56'49'',7}{(\sqrt{\cos 30^{\circ}34''})^{29}}$.
169. $\left(\frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 52^{\circ}5'34'',18}}{\operatorname{tg} 40^{\circ}49''} \right)^{-35}$. 170. $\frac{0,148769 (\sin 12^{\circ})^{0,47}}{\sqrt{\operatorname{ctg} 66^{\circ}50'16'',38}}$.
171. $\frac{(3,6 - \operatorname{ctg} 16^{\circ}15'',3)^{0,43}}{\operatorname{tg} 59^{\circ}38'16'',57}$. 172. $\frac{\sqrt{0,14 + \operatorname{tg} 20^{\circ}2'4'',3}}{\cos 72^{\circ}16'43'',28}$.
173. $\frac{1,03 - \operatorname{ctg} 49^{\circ}9'4''}{\sqrt{\sin 30^{\circ}50'56'',09}}$. 174. $\frac{(0,906 - \sin 57^{\circ}5'',64)^{1,02}}{\sqrt{\cos 24^{\circ}24'42'',42}}$.

Найти наименьшее положительное значение для x :

175. $\cos x = \operatorname{tg} 17^{\circ}24'28'',57$. 176. $\sin x = 0,18 \operatorname{ctg} 39^{\circ}4'5'',09$.
177. $\operatorname{tg} x = 0,46 + \cos 19^{\circ}19'2'',68$.
178. $\operatorname{ctg} x = \sin 49^{\circ}47'41'',72 - 4,8$.
179. $\sin x = \frac{\cos 80^{\circ}24'35'',39}{0,4247564}$. 180. $\cos x = \frac{0,3253286}{\operatorname{tg} 49^{\circ}47'4'',25}$.
181. $\sin x = \frac{\cos 69^{\circ}42'56'',08}{\operatorname{tg} 39^{\circ}2'41'',75}$.
182. $\operatorname{tg} x = \frac{\cos 40^{\circ}12'16''}{\operatorname{ctg} 52^{\circ}4'45'',54}$.

183. $\operatorname{ctg} x = \frac{\operatorname{tg} 29^{\circ}32'34'',34}{12 \cos 51^{\circ}52'51'',69}$
184. $\cos x = \frac{\sin 160^{\circ} \cdot \operatorname{ctg} 68^{\circ}2'0'',7}{0,96 \operatorname{tg} 41^{\circ}47'24'',36}$
185. $\operatorname{tg} x = (\sec 15^{\circ}15'18'',97)^{-0,48}$
186. $\cos x = (\operatorname{tg} 40^{\circ}27'23'',35)^{1,4}$
187. $\operatorname{ctg} x = \sqrt[46]{\sin 5^{\circ}45'21'',15}$. 188. $\sin x = \sqrt[36]{\operatorname{ctg} 19^{\circ}29'0'',73}$
189. $\operatorname{tg} x = (0,8)^{0,24} \cdot \cos 17^{\circ}57'2'',26$
190. $\cos x = (0,05 + \sin 52^{\circ}15'7'',8)^{0,14}$
191. $\operatorname{ctg} x = \sqrt[75]{1,03 - \operatorname{tg} 39^{\circ}34'36'',75}$
192. $\sin x = (1,62 + \cos 64^{\circ}4'16'',94)^{-0,30}$
193. $\operatorname{tg} x = (\operatorname{ctg} 15^{\circ}19'30'',07 - 2,97)^{1,8}$
194. $\sin x = \sqrt[47]{\frac{\cos 64^{\circ}6'29'',82}{148,0268}}$
195. $\operatorname{tg} x = \sqrt[49]{\frac{\cos 54^{\circ}25'26'',14}{9006284}}$
196. $\sin x = \frac{\operatorname{tg} 20^{\circ}28'35'',72}{\sqrt[58]{\operatorname{ctg} 70^{\circ}7'19'',39}}$. 197. $\cos x = \frac{\sqrt[46]{\sin 50^{\circ}50'57''}}{\operatorname{ctg} 208^{\circ}22'23'',61}$
198. $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos 60^{\circ}16'24'',37}{(\operatorname{tg} 38^{\circ}39'17'',0,35)^{0,35}}$. 199. $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{ctg} 78^{\circ}17'38'',12}{(\sin 40^{\circ}48'26'',0,013)^{0,013}}$
200. $\cos x = \left(\frac{0,04982876}{\sin 52^{\circ}37'20'',75} \right)^{1,04}$
201. $\cos x = \frac{1,82 - \operatorname{tg} 45^{\circ}8'',77}{\sqrt[75]{\cos 60^{\circ}56'23'',06}}$
202. $\sin x = \frac{\cos 34^{\circ}47'32'',26}{\sqrt[47]{1,9 - \operatorname{tg} 58^{\circ}2'34'',82}}$
203. $\operatorname{tg} x = \frac{(\operatorname{ctg} 22^{\circ}13'27'',74 \cdot 2,44)^{0,23}}{\sin 48^{\circ}46'52'',47}$
204. $\operatorname{cosec} x = \frac{\sqrt[42]{\cos 64^{\circ}37'27'',39}}{0,7 \operatorname{tg} 43^{\circ}45'54'',46}$
205. $\operatorname{tg} x = \frac{1,2 (\cos 70^{\circ}19'48'',4)^{0,57}}{\sqrt[75]{\operatorname{tg} 12^{\circ}35'16'',38}}$
206. $\sin x = \left(\frac{\cos 69^{\circ}52'34'',08}{\sqrt[76]{\operatorname{tg} 5^{\circ}34'' - 0,0745}} \right)^{0,75}$

$$207. \sec x = \sqrt[92]{(1,03 - \sin 54^{\circ}48'16'',37)^{-0,16} \cdot 0,0728 \operatorname{ctg} 37^{\circ}4'34'',7}$$

$$208. \cos x = \frac{(\operatorname{tg} 72^{\circ}8'19'',6)^{-0,43} + 0,018}{2,4 \sqrt[30]{\sin 20^{\circ}40'41'',28}}$$

$$209. \operatorname{tg} x = \frac{(1,2 - \cos 59^{\circ}28'',7)^{0,38} \cdot 0,7148628}{\sqrt[54]{\sin 17^{\circ}18'27'',82}}$$

$$210. \operatorname{ctg} x = \frac{(0,17 \sin 24^{\circ}28'2'',8)^{0,47} - 0,168}{\sqrt[87]{(\cos 71^{\circ}42'57'',38)^{71}}}$$

Найти величины:

$$211. \sin 2,56. \quad 212. \cos \frac{1}{\pi}. \quad 213. \cos \sqrt[28]{0,47563}.$$

$$214. \operatorname{tg} \cos 42^{\circ}18'32'',15. \quad 215. \sin \sqrt[48]{\cos 16^{\circ}42'18''}.$$

$$216. \sqrt[8]{\cos(0,456 - \sqrt[50]{0,472})} \quad 217. \sqrt[85]{\cos \sqrt[40]{\sin \sqrt[50]{0,5}}}$$

$$(\operatorname{tg} 39^{\circ}1'25'')^{27}$$

$$218. (\cos 2^{\circ})^{\sin 2^{\circ}}. \quad 219. \sqrt[10]{\sin \sqrt[10]{10}}.$$

Опредѣлить x изъ уравненія:

$$220. 2^{\cos x} = 1,5. \quad 221. (\sin 16^{\circ}19'')^{\operatorname{ctg} x} = \cos 16''19''.$$

$$222. (\sqrt[45]{\operatorname{tg} 40^{\circ}42',6})^{\sin x} = \operatorname{ctg} 45^{\circ}4'28''.$$

Задачи на вычисленія по пятизначнымъ таблицамъ логарифмовъ.

Найти:

$$223. \lg \sin 27^{\circ}43'27''. \quad 224. \lg \sin 50^{\circ}17'38''. \quad 225. \lg \sin 32^{\circ}46''.$$

$$226. \lg \sin 2^{\circ}48'19''. \quad 227. \lg \cos 17^{\circ}32'35''. \quad 228. \lg \cos 47^{\circ}5'24''.$$

$$229. \lg \cos 56^{\circ}17''. \quad 230. \lg \cos 87^{\circ}20'38''. \quad 231. \lg \operatorname{tg} 30^{\circ}6'43''.$$

$$232. \lg \operatorname{tg} 82^{\circ}53'8''. \quad 233. \lg \operatorname{tg} 48^{\circ}47'24''. \quad 234. \lg \operatorname{tg} 1^{\circ}58'16''.$$

$$235. \lg \operatorname{ctg} 5^{\circ}29'38''. \quad 236. \lg \operatorname{ctg} 26^{\circ}17''. \quad 237. \lg \operatorname{ctg} 49^{\circ}5'23''.$$

$$238. \lg \operatorname{ctg} 80^{\circ}41'51''. \quad 239. \lg \sec 40^{\circ}17'35''. \quad 240. \lg \operatorname{cosec} 60^{\circ}48''.$$

$$241. \lg \sin 164^{\circ}47'32''. \quad 242. \lg \sin 250^{\circ}13'25''. \quad 243. \lg \cos 93^{\circ}46''.$$

$$244. \lg \cos 310^{\circ}10'18''. \quad 245. \lg \operatorname{tg} 194^{\circ}4'53''. \quad 246. \lg \operatorname{ctg} 341^{\circ}17'46''.$$

Найти наименьшую положительную величину x , когда

$$247. \lg \sin x = 9,51703. \quad 248. \lg \sin x = 9,92406.$$

$$249. \lg \sin x = 9,96375. \quad 250. \lg \cos x = 9,96465.$$

$$251. \lg \cos x = 8,71743. \quad 252. \lg \cos x = 9,99770.$$

253. $\lg \operatorname{tg} x = 9,80770$. 254. $\lg \operatorname{tg} x = 0,00349$.
 255. $\lg \operatorname{tg} x = 8,70914$. 256. $\lg \operatorname{ctg} x = 0,76537$.
 257. $\lg \operatorname{ctg} x = 0,13463$. 258. $\lg \operatorname{ctg} x = 9,92019$.
 259. $\lg \operatorname{sec} x = 0,39513$. 260. $\lg \operatorname{sec} x = 9,92068$.
 261. $\lg \operatorname{csc} x = 1,09326$.

Найти по таблицамъ Деламбра (262 — 279)*):

262. $\lg \sin 1^{\circ}28'34''$. 263. $\lg \sin 39^{\circ}46''$,4. 264. $\lg \sin 48''$,38.
 265. $\lg \cos 87^{\circ}59'41''$. 266. $\lg \cos 89^{\circ}36'55''$,7. 267. $\lg \operatorname{tg} 35^{\circ}47''$,096.
 268. $\lg \operatorname{tg} 2^{\circ}26''$,4. 269. $\lg \operatorname{ctg} 89^{\circ}59'29''$,52. 270. $\lg \operatorname{ctg} 87^{\circ}38'43''$.

Найти наименьшую положительную величину x , когда

271. $\lg \sin x = 8,15943$. 272. $\lg \sin x = 8,37500$.
 273. $\lg \sin x = 6,74719$. 274. $\lg \cos x = 8,53612$.
 275. $\lg \cos x = 7,98300$. 276. $\lg \operatorname{tg} x = 8,54901$.
 277. $\lg \operatorname{tg} x = 7,71000$. 278. $\lg \operatorname{ctg} x = 7,49076$.
 279. $\lg \operatorname{ctg} x = 8,47400$.

Найти:

280. $\sin 60^{\circ}28'34''$. 281. $\sin 3^{\circ}26''$. 282. $\cos 48^{\circ}13'8''$.
 283. $\cos 86^{\circ}36'19''$. 284. $\operatorname{tg} 4^{\circ}13''$. 285. $\operatorname{tg} 59^{\circ}50'34''$.
 286. $\operatorname{ctg} 79^{\circ}37''$. 287. $\operatorname{ctg} 8^{\circ}15'40''$. 288. $\operatorname{sec} 56^{\circ}32''$.
 289. $\operatorname{cosec} 80^{\circ}5'25''$. 290. $\sin 147^{\circ}46'13''$. 291. $\sin 301^{\circ}9'43''$.
 292. $\cos 98^{\circ}27'24''$. 293. $\cos 200^{\circ}39''$. 294. $\operatorname{tg} 115^{\circ}37''$.
 295. $\operatorname{tg} 281^{\circ}1'15''$. 296. $\operatorname{ctg} 260^{\circ}3'44''$. 297. $\sin 1000^{\circ}25'27''$.
 298. $\cos 821^{\circ}39''$. 299. $\operatorname{tg} 564^{\circ}51'7''$. 300. $\operatorname{ctg} 951^{\circ}18''$.

Найти наименьшую положительную величину x , когда

301. $\sin x = 0,726$. 302. $\sin x = 0,049876$. 303. $\sin x = \frac{149}{317}$.
 304. $\cos x = 0,82$. 305. $\cos x = \frac{17}{45}$. 306. $\cos x = 0,0875$.
 307. $\operatorname{tg} x = 0,90402$. 308. $\operatorname{tg} x = 5,62$. 309. $\operatorname{ctg} x = 70$.
 310. $\operatorname{ctg} x = 0,0446$. 311. $\operatorname{sec} x = 1,22$. 312. $\operatorname{cosec} x = 3$.
 313. $\sin x = -0,575$. 314. $\cos x = -\frac{15}{47}$. 315. $\operatorname{tg} x = -1,7$.
 316. $\operatorname{ctg} x = -3\frac{4}{7}$. 317. $\operatorname{sec} x = -27$. 318. $\operatorname{cosec} x = -0,65$.

Найти все величины для угла x отъ 0° до 360° , когда

319. $\sin x = -0,47$. 320. $\cos x = \frac{15}{49}$. 321. $\operatorname{tg} x = -5$.
 322. $\operatorname{ctg} x = 0,7234$. 323. $\operatorname{sec} x = -3$. 324. $\operatorname{cosec} x = 4,35$.

Найти:

325. $0,12 + \cos 72^{\circ}29''$. 326. $\operatorname{tg} 39^{\circ}28'33'' = 1,4$.

*) См. внизу стр 1 — 32 въ пятнадцатомъ логарифм., изд. Моск.

327. $0,75 + \sin 247^{\circ}47'5''$. 328. $\operatorname{tg} 340^{\circ}5'29'' + 16$.
329. $42 \sin 38^{\circ}59'37''$. 330. $0,049 \operatorname{ctg} 40^{\circ}47'48''$.
331. $\operatorname{ctg} 72^{\circ}16'22''$
0,948686 332. $\sin 48^{\circ}29''$
12,1764 333. $\operatorname{tg} 28^{\circ}29'37''$
1,06 $\cos 61^{\circ}24''$
1,2573
334. $2,65 \operatorname{ctg} 85^{\circ}51''$
 $\sin 40^{\circ}47'31''$ 335. $0,8 \operatorname{ctg} 23^{\circ}12' \cdot \operatorname{tg} 40^{\circ}35''$
336. $0,568 \cdot \frac{\cos 84^{\circ}51''}{\operatorname{tg} 59^{\circ}48'29''}$ 337. $(\operatorname{tg} 44^{\circ}49'52'')^{12}$.
338. $(\cos 39^{\circ}39'14'')^{0,36}$. 339. $(\operatorname{ctg} 25^{\circ}15'27'')^{-1,08}$.
340. $\sqrt[89]{\operatorname{ctg} 51^{\circ}59'52''}$. 341. $\sqrt[25]{\sin 200^{\circ}16''}$.
342. $\sqrt[10]{\operatorname{tg} 60^{\circ}20'21''}$. 343. $(\operatorname{tg} 42^{\circ}42'43'')^{1,5} - 0,862$.
344. $1,7 + \sqrt[66]{\operatorname{ctg} 64^{\circ}16'26''}$. 345. $(0,16 + \sin 19^{\circ}19'')^{0,96}$.
346. $(1,004 - \cos 59^{\circ}28'3'')^{0,12}$. 347. $\sqrt[58]{\operatorname{ctg} 40^{\circ}28'31''} - 1,171$.
348. $(\cos 49^{\circ}27'28'')^{\frac{17}{94}}$. 349. $\sqrt[29]{(\operatorname{ctg} 36^{\circ}39'38'')^{-15}}$.
350. $\sqrt[75]{(\cos 80^{\circ}54'13'')^{1,3}} - 1,0246$. 351. $0,28 (\cos 40^{\circ}40'36'')^{1,08}$.
352. $(1,4 \sin 4^{\circ}47'')^{-0,79}$. 353. $\sin 6^{\circ} \sqrt[29]{\cos 52^{\circ}37''}$.
354. $\sqrt[46]{0,00014 \operatorname{ctg} 70^{\circ}12''}$. 355. $\frac{0,24529}{(\cos 48^{\circ}4'24'')^{0,27}}$.
356. $(\operatorname{tg} 35^{\circ}16'15'')^{0,36}$
1,29727 357. $\sqrt[54]{0,0149827}$
 $\cos 28^{\circ}29'31''$ 358. $\frac{0,0024869}{\sqrt[64]{\operatorname{tg} 12^{\circ}49'49''}}$
359. $\left(\frac{\sin 20^{\circ}28'23''}{0,88857}\right)^{-0,76}$ 360. $\sqrt[68]{\frac{0,000001}{\cos 68^{\circ}26'24''}}$
361. $\frac{\sin 15^{\circ}19'37''}{(\operatorname{ctg} 60^{\circ}36'')^{0,39}}$ 362. $\frac{\operatorname{tg} 20^{\circ}20'27''}{\sqrt[50]{\cos 52^{\circ}56'17''}}$
363. $\sqrt[68]{0,008 (\sin 26^{\circ}35'26'')^{31}}$ 364. $\sqrt[65]{(0,28)^{96} \operatorname{tg} 48^{\circ}3'55''}$
365. $\frac{(0,049 \sin 24^{\circ}14'')^{0,37}}{\cos 46^{\circ}28'52''}$ 366. $\frac{0,24 \sin 56^{\circ}56'49''}{(\sqrt[15]{\cos 30^{\circ}24''})^{29}}$
367. $\sqrt[48]{\left(\frac{\sin 16^{\circ}48'29''}{\cos 70^{\circ}6''}\right)^{53}}$ 368. $\left(\sqrt[76]{\frac{\operatorname{ctg} 52^{\circ}5'34''}{\operatorname{tg} 40^{\circ}49''}}\right)^{-85}$
369. $\frac{(3,6 - \operatorname{ctg} 16^{\circ}15'')^{0,48}}{\operatorname{tg} 59^{\circ}38'17''}$ 370. $\frac{\sqrt[59]{6,14 + \operatorname{tg} 20^{\circ}1'53''}}{\sqrt[3]{\cos 72^{\circ}16'43''}}$

$$371. \frac{1,03 - \operatorname{ctg} 49^{\circ}8'43''}{\sqrt[75]{\sin 70^{\circ}50'56''}}$$

$$372. \sqrt[7]{\frac{\cos 80^{\circ}17'5'' - 0,34}{(\operatorname{tg} 38^{\circ}29'57'')^{-71}}}$$

$$373. \left(\frac{\sqrt[72]{\sec 49^{\circ}7'48'' - 1,2}}{\operatorname{tg} 44^{\circ}48'31''} \right)^{0,046}$$

Найти наименьшую положительную величину для x , когда

$$374. \cos x = \operatorname{tg} 17^{\circ}24'29''$$

$$375. \sin x = 0,08 \operatorname{ctg} 39^{\circ}4'5''$$

$$376. \operatorname{tg} x = 0,56 + \cos 19^{\circ}18'49''$$

$$377. \operatorname{ctg} x = \sin 49^{\circ}47'42'' - 4,8$$

$$378. \sin x = \frac{\cos 80^{\circ}24'35''}{0,424756}$$

$$379. \cos x = \frac{0,32533}{\operatorname{tg} 49^{\circ}46'45''}$$

$$380. \operatorname{tg} x = -\frac{\cos 40^{\circ}12'16''}{\operatorname{ctg} 52^{\circ}4'46''}$$

$$381. \operatorname{ctg} x = \frac{\operatorname{tg} 29^{\circ}32'54''}{12 \cos 51^{\circ}52'32''}$$

$$382. \operatorname{tg} x = (\sec 15^{\circ}15'19'')^{-0,48}$$

$$383. \cos x = (\operatorname{tg} 40^{\circ}27'23'')^{1,4}$$

$$384. \operatorname{ctg} x = \sqrt[46]{\sin 5^{\circ}45'21''}$$

$$385. \sin x = \sqrt[55]{\operatorname{ctg} 19^{\circ}29'17''}$$

$$386. \cos x = (0,05 + \sin 52^{\circ}14'49'')^{0,14}$$

$$387. \operatorname{ctg} x = \sqrt[75]{1,03 - \operatorname{tg} 39^{\circ}34'36''}$$

$$388. \sin x = (1,62 + \cos 64^{\circ}4'17'')^{-0,36}$$

$$389. \sin x = \sqrt[47]{\frac{\cos 64^{\circ}6'29''}{148,026}}$$

$$390. \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{ctg} 78^{\circ}17'38''}{(\sin 40^{\circ}48'26'')^{0,018}}$$

$$391. \sin x = \frac{\operatorname{tg} 20^{\circ}28'36''}{\sqrt[58]{\operatorname{ctg} 70^{\circ}7'19''}}$$

$$392. \cos x = \frac{\sqrt[46]{\sin 50^{\circ}50'57''}}{\operatorname{ctg} 208^{\circ}22'24''}$$

$$393. \cos x = \left(\frac{0,0498288}{\sin 52^{\circ}37'21''} \right)^{1,04}$$

$$394. \operatorname{ctg} x = \sqrt[77]{\frac{0,00245674}{\operatorname{tg} 72^{\circ}51'44''}}$$

$$395. \sin x = \frac{\sqrt[48]{1,04 \operatorname{tg} 4^{\circ}29'34''}}{\operatorname{ctg} 46^{\circ}22'28''}$$

$$396. \sec x = \frac{\operatorname{ctg} 72^{\circ}46'34''}{0,068 (\sin 19^{\circ}18'')^{0,96}}$$

$$397. \operatorname{tg} x = \frac{1,2 (\cos 70^{\circ}19'48'')^{0,57}}{\sqrt[75]{\operatorname{tg} 12^{\circ}35'16''}}$$

$$398. \operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt[82]{0,17 + \operatorname{tg} 14^{\circ}5'38''}}{\sin 72^{\circ}16'42''}$$

$$399. \sin x = \frac{\cos 34^{\circ}47'32''}{\sqrt[47]{1,9 - \operatorname{tg} 58^{\circ}2'35''}}$$

$$400. \sec x = \sqrt[34]{\frac{\sin 64^{\circ}36'29''}{\operatorname{ctg} 39^{\circ}4'52''}} + 0,728$$

$$401. \sin x = \frac{0,46}{\sqrt[40]{\operatorname{tg} 40^{\circ}54'17''}} (\operatorname{ctg} 21^{\circ}10'3'')^{-1,1}$$

$$402. \operatorname{tg} x = \sqrt[37]{\frac{0,042 \sin 29^{\circ}49'16''}{(\cos 59^{\circ}18'43'')^{0,16}}} = 0,21048.$$

Задачи на VII Отдѣль.

Въ слѣдующихъ примѣрахъ (отъ 1 до 15 вкл.) сдѣлать формулы удобными для логарифмическихъ вычисленій:

$$1. \sin 62^{\circ} + \sin 17^{\circ}. \quad 2. \sin 48^{\circ} - \sin 16^{\circ}18''.$$

$$3. \cos 52^{\circ}18' + \cos 49^{\circ}46''. \quad 4. \sin 32^{\circ} + \cos 16^{\circ}1'39''.$$

$$5. 1 + \sin \alpha + \cos \alpha. \quad 6. \sin^2 A - \sin^2 B. \quad 7. \cos^3 A - \cos^3 B.$$

$$8. 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta. \quad 9. \operatorname{tg} A \pm \operatorname{tg} B. \quad 10. \operatorname{ctg} A \pm \operatorname{ctg} B.$$

$$11. \operatorname{tg}^2 A - \operatorname{tg}^2 B. \quad 12. \operatorname{ctg}^2 A - \operatorname{ctg}^2 B. \quad 13. x = \frac{a - b \sin \alpha}{a + b \sin \alpha}.$$

$$14. x = \frac{a \sin \alpha + b \sin \beta}{c \sin \gamma}. \quad 15. x = \sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}, \text{ гдѣ } a > b.$$

$$16. x = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}, \text{ гдѣ } a > b. \quad 17. x = a \pm \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$18. x = b \pm \sqrt{a^2 - b^2}, \text{ гдѣ } b < a.$$

$$19. x = \sqrt{\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha}.$$

Опредѣлить x изъ уравненій:

$$20. \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 10. \quad 21. \cos 6^{\circ}12' \cdot \sin x + 2 \cos x = 0,92.$$

Опредѣлить x и y изъ слѣдующихъ уравненій:

$$22. \sin x + \sin y = 0,4, \quad x - y = 16^{\circ}.$$

$$23. \cos x - \cos y = 0,1, \quad x + y = 72^{\circ}48'16''.$$

$$24. x + y = 16^{\circ}17'; \quad \sin x \sin y = 0,005.$$

$$25. \sin x \cos y = 0,70006, \quad x - y = 30^{\circ}42''.$$

$$26. \frac{\sin x}{\sin y} = 3,7042, \quad x + y = 38^{\circ}23'15'',04.$$

Рѣшить по логарифмамъ уравненія (27—41):

$$27. x \sin 72^{\circ}52'36'' + x \cos 264^{\circ} = (0,01)^{0,01}.$$

$$28. 3x \sin 46^{\circ}1'39'' = \sqrt[40]{\operatorname{tg} 40^{\circ}} - x \cos 32^{\circ}25''.$$

29. $x^5 + x\sqrt[5]{0,6} + 0,00645 = 0.$

30. $48x^2 - 256,4x + 938,25 = 0.$

31. $x^2 + 360,42x - 3489,1 = 0.$

32. $x^2 + 0,3245x - 0,01826 = 0.$

33. $x^2 \sin 16^\circ + x + \cos 76^\circ 30' = 0.$

34. $x^2 + px - q = 0$, когда $\lg p = 2,9143267$ и $\lg q = 3,0054924$.

35. $x^2 + px + q = 0$, когда $\lg p = 3,0678463$ и $\lg q = 1,7860934$.

36. $3286 \operatorname{tg} x - 96 \operatorname{ctg} \left(45^\circ + \frac{x}{2} \right) = 1851.$

37. $x^3 - 3x - 1 = 0.$ 38. $x^3 - 7x + 7 = 0.$

39. $x^3 = 10,871385x + 18,01032 = 0.$ 40. $x^3 - 2x^2 + 8 = 0.$

41. $x^3 + 9x^2 + 21x + 13 = 0.$

42. Раздѣлить полушаръ, котораго радиусъ равенъ 1 аршину, на двѣ равныя части плоскостью, параллельною основанію полушара.

43. Определить радиусъ окружности съ точностью до 0,000001, въ которой три хорды, соответствующія тремъ дугамъ, которыхъ сумма равна полуокружности, будутъ: 1 фута, 2 фута и 3 фута.

Задачи на VIII отдѣль.

1. Стороны треугольника суть: $x^2 + x + 1$, $2x + 1$ и $x^2 - 1$; показать, что больший изъ угловъ треугольника равенъ 120° .

Треугольникъ будетъ равнобедренный, когда

2. $c \cos B = b \cos C.$ 3. $a \sec B = 2c.$ 4. $\sin A = 2 \cos B \sin C.$

5. Въ прямоугольномъ треугольникѣ, гдѣ уголъ C прямой,

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{b+c}{a}.$$

6. Если въ треугольникѣ ABC изъ вершины A опустимъ перпендикуляръ AD на противоположащую сторону и изъ точки D опустимъ перпендикуляры DE и DF соответственно на стороны AB и AC , то

$$AE \cdot BE \cdot \cos^2 C = AF \cdot CF \cdot \cos^2 B.$$

7. Если D означаетъ средину стороны BC въ треугольникѣ ABC , то

$$\operatorname{ctg} BAD - \operatorname{ctg} B = 2 \operatorname{ctg} A.$$

Вывести (задачи отъ 8 до 28 вкл.) слѣдующія отношенія между сторонами и углами треугольника:

8. $(a - b \cos C) \operatorname{tg} B = b \sin C.$ 9. $a(b \cos C - c \cos B) = b^2 - c^2.$

10. $a^2 + b^2 + c^2 = 2ab \cos C + 2ac \cos B + 2bc \cos A$.
11. $a(\cos B \cos C + \cos A) = b(\cos A \cos C + \cos B) =$
 $= c(\cos A \cos B + \cos C)$.
12. $(b + c - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = (c + a - b) \operatorname{tg} \frac{B}{2} = (a + b - c) \operatorname{tg} \frac{C}{2}$.
13. $1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{2c}{a + b + c}$.
14. $\operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{2a}{b + c - a} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$.
15. $b \cos B + c \cos C = a \cos (B - C)$.
16. $\cos A + \cos B = 2 \cdot \frac{a + b}{c} \cdot \sin^2 \frac{C}{2}$.
17. $a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A - 2ab \sin C$.
18. $\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B = (b^2 - a^2) : ab \sin C$.
19. $\frac{1}{a} \cos^2 \frac{A}{2} + \frac{1}{b} \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{1}{c} \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{(a + b + c)^2}{4abc}$.
20. $(a + b) \cos C + (b + c) \cos A + (c + a) \cos B = a + b + c$.
21. $(a^2 - b^2) \operatorname{ctg} C + (b^2 - c^2) \operatorname{ctg} A + (c^2 - a^2) \operatorname{ctg} B = 0$.
22. $(a - b) \operatorname{ctg} \frac{C}{2} + (c - a) \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + (b - c) \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = 0$.
23. $(a + b + c)(\cos A + \cos B + \cos C) = 2a \cos^2 \frac{A}{2} + 2b \cos^2 \frac{B}{2} +$
 $+ 2c \cos^2 \frac{C}{2}$.
24. $\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{\cos A \cos B}{ab} + \frac{\cos A \cos C}{ac} + \frac{\cos B \cos C}{bc}$.
25. $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 2a \sin B \sin C$.
26. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{2a \sin B \sin C}{a + b + c}$.
27. $\left(\operatorname{ctg} \frac{A}{4} \operatorname{cosec} \frac{A}{2} \right) : \left(\operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right) = \frac{b + c - a}{2a}$.
28. $a^2 - 2ab \cos (60^\circ + C) - c^2 = 2bc \cos (60^\circ + A)$.
29. Показать, что периметръ треугольника равенъ
 $2c \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sec \frac{A + B}{2}$.
30. Если $b \sin^2 A + a \sin^2 B = c \sin^2 B + b \sin^2 C = a \sin^2 C + c \sin^2 A$,
то $a : b : c = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$.

31. Пусть a , b и c будутъ сторонами треугольника, противолежащія угламъ 2ϑ , 3ϑ и 4ϑ ; показать что $\operatorname{tg}^2\vartheta = \left(\frac{2b}{a+c}\right)^2 - 1$.

32. Если въ треугольникѣ ABC уголъ C тупой, то $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B < 1$.

33. Если стороны a , b и c треугольника ABC составляютъ арифметическую прогрессию, то

$$\cos \frac{A-C}{2} = 2 \sin \frac{B}{2} \quad \text{и} \quad a \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{3b}{2}.$$

34. Показать, что прямая, дѣлящая уголъ треугольника пополамъ, раздѣляетъ противоположную сторону на части, обратно пропорциональныя синусамъ угловъ, прилежащихъ къ этой сторонѣ.

35. Если котангенсы угловъ треугольника составляютъ арифметическую прогрессию, то квадраты сторонъ треугольника будутъ также составлять арифметическую прогрессию.

36. Показать, что если стороны треугольника пропорціональны выраженіямъ: $gh(k^2+l^2)$, $kl(g^2+h^2)$ и $(hk+gl)(hl-gk)$, то тригонометрическія величины угловъ треугольника будутъ выраженія рациональныя.

37. Если въ треугольникѣ ABC середину стороны BC , точку D , соединимъ съ вершиною A , то, при $b > c$, $(b^2 - c^2) \operatorname{tg} ADB = 2bc \sin A$.

38. Если углы A , B и C въ треугольникѣ ABC будутъ такіе, что $\operatorname{ctg} \frac{A}{2}$, $\operatorname{ctg} \frac{B}{2}$ и $\operatorname{ctg} \frac{C}{2}$ составляютъ арифметическую прогрессию, то $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = 3$.

39. Черезъ вершины угловъ A и B въ треуг. ABC проведемъ такъ прямая, чтобы онѣ дѣлили эти углы на части, кот. синусы были въ отношеніи 1 къ n ; эти прямая пересѣкутся, положимъ, въ точкѣ D . Показать, что прямая CD дѣлитъ уголъ C на части въ отношеніи 1 къ n^2 .

40. Пусть l означаетъ длину равнодѣлящей угла A въ треугольникѣ ABC (ограниченной противуположающею стороною) и ϑ уголъ, который составляетъ равнодѣлящая съ основаніемъ треугольника. Показать, что периметръ треугольника равенъ

$$2l \cos \frac{1}{2} A \sin \vartheta : (\sin \vartheta - \sin \frac{1}{2} A).$$

41. Раздѣлимъ основаніе треугольника на три равныя части и точки дѣленія соединимъ съ противоположною вершиною; тогда уголъ при вершинѣ раздѣлится на три части, которыхъ тангенсы, положимъ, будутъ: t_1 , t_2 и t_3 . Показать, что

$$\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_3}\right)\left(\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_2}\right) = 4\left(1 + \frac{1}{t_2^2}\right).$$

42. Если синусы угловъ треугольника будутъ составлять арифметическую прогрессию, то произведеніе тангенса половины большаго угла на тангенсъ половины меньшаго равно $\frac{1}{3}$.

43. Если ϑ будетъ большій изъ угловъ треугольника, а φ — меньшій и стороны треугольника составляютъ арифметическую прогрессию, то

$$4(1 - \cos \vartheta)(1 - \cos \varphi) = \cos \vartheta + \cos \varphi.$$

44. Показать, что въ треугольникѣ ABC ,

$$a^2 \frac{\cos \frac{1}{2}(B-C)}{\cos \frac{1}{2}(B+C)} + b^2 \frac{\cos \frac{1}{2}(C-A)}{\cos \frac{1}{2}(C+A)} + c^2 \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} = 2(ab + bc + ac).$$

Задачи на IX отдѣль.

I. Задачи на рѣшеніе треугольниковъ по неизмѣннымъ таблицамъ логарифмовъ.

Рѣшить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ и острому углу:

1. $c = 38$; $A = 48^\circ 39'$.
2. $c = 100$; $A = 17^\circ 29' 36''$.
3. $c = 480$; $B = 30^\circ 48''$, 4.
4. $c = 57,28$; $A = 39^\circ 19' 17''$, 6.
5. $c = 4,5486$; $A = 24^\circ 44' 46''$, 5.
6. $c = 0,000564$; $B = 60^\circ 51' 28''$, 19.
7. $c = 0,0848675$; $A = 29^\circ 9' 51''$, 38.
8. $c = 396288$; $B = 56^\circ 30' 9''$, 47.
9. $c = 0,6947867$; $B = 6^\circ 48' 25''$, 24.
10. $c = 2\frac{7}{9}$; $B = 38^\circ 17' 27''$, 44.

Рѣшить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ и катету:

11. $c = 100$; $a = 57$.
12. $c = 6849$; $a = 4569$.
13. $c = 1,45$; $b = 0,478$.
14. $c = 12$; $b = 4,92$.
15. $c = 50,6$; $b = 47,8126$.
16. $c = 0,0014$; $a = 0,000847$.
17. $c = 121478$; $a = 56948$.
18. $c = 1$; $b = 0,0142768$.

19. $c = 0,949672$; $b = 0,8$. 20. $c = 1,248$; $a = 0,5648786$.
 21. $c = 30$; $a = 29$ *). 22. $c = 0,5$; $b = 0,48967$.
 23. $c = 17$; $a = 16,854$. 24. $c = 0,08$; $b = 0,0792486$.

Рѣшить прямоугольный треугольникъ по катету и острому углу:

25. $a = 75$; $A = 24^{\circ}24'30''$. 26. $a = 396$; $B = 49^{\circ}42''$.
 27. $b = 1000$; $B = 61^{\circ}50'27'',8$. 28. $b = 1,4$; $A = 58^{\circ}6'8'',64$.
 29. $a = 0,001$; $A = 8^{\circ}17'12'',08$.
 30. $a = 0,84217$; $B = 34^{\circ}47'44'',26$.
 31. $b = 0,0921719$; $B = 10^{\circ}34'47'',37$.
 32. $b = 426878$; $A = 19^{\circ}8'',84$.
 33. $a = 54,5267$; $A = 36^{\circ}54'7'',84$.
 34. $b = 0,5718196$; $B = 80^{\circ}35'52'',07$.

Рѣшить прямоугольный треугольникъ по катетамъ:

35. $a = 62$; $b = 87$. 36. $a = 15$; $b = 10,7$.
 37. $a = 0,0487$; $b = 0,145$. 38. $a = 3$; $b = 2,08286$.
 39. $a = 5468$; $b = 148627$. 40. $a = 0,28$; $b = 0,982876$.
 41. $a = 1,2$; $b = 4,000728$. 42. $a = 0,0864767$; $b = 0,16$.
 43. $a = 10,24625$; $b = 9,964$. 44. $a = 0,0084$; $b = 0,0282473$.

Рѣшить прямоуг. треугольникъ безъ помощи логарифмовъ.

45. $A = 45^{\circ}$; $b = 4,5$. 46. $B = 60^{\circ}$; $a = 10$.
 47. $A = 30^{\circ}$; $c = 0,56$. 48. $b = 6$; $c = 12$.
 49. $a = 4$; $B = 22^{\circ}30'$. 50. $c = 10$; $A = 15^{\circ}$.
 51. $a = 2$; $b = \sqrt{12}$.

Рѣшить равнобедренный треугольникъ, въ которомъ b основание,
 а h — высота:

52. $a = 14,268$; $A = 67^{\circ}28'24''$.
 53. $a = 1,56894$; $C = 38^{\circ}39'40'',6$.
 54. $a = 0,246873$; $B = 46^{\circ}3'26'',18$.
 55. $b = 0,47$; $A = 29^{\circ}59'27'',7$.
 56. $b = 1,30864$; $A = 10^{\circ}26'56'',96$.
 57. $b = 175,167$; $B = 30^{\circ}15'14'',72$.
 58. $a = 0,961918$; $b = 0,75$. 59. $a = 1,24$; $b = 2,087695$.
 60. $a = 0,0496$; $h = 0,0184968$. 61. $b = 15,6428$; $h = 4,96$.
 62. $h = 0,948659$; $A = 35^{\circ}35'28'',45$.

*) 21, 22, 23 и 24 зад. надо рѣшить по формулѣ § 127.

63. $b = 1126,784$; $B = 52^{\circ}53'59'',06$.

64. $a = 25$; $B = 48^{\circ}59'$; $C = 62^{\circ}16'15''$.

Рѣшить треугольникъ по сторонамъ и двумъ угламъ:

65. $a = 2,65$; $B = 48^{\circ}49'16''$; $C = 20^{\circ}35'14''$.

66. $c = 0,068318$; $A = 100^{\circ}$; $B = 68^{\circ}13'7'',86$.

67. $a = 10,4594$; $B = 60^{\circ}16'$; $C = 22^{\circ}25'39'',7$.

68. $b = 0,851968$; $A = 100^{\circ}28'35'',8$; $C = 60^{\circ}26''$.

69. $b = 1,21188$; $B = 47^{\circ}19'$; $C = 20^{\circ}56'',26$.

70. $a = 45,0086$; $B = 16^{\circ}14'',85$; $C = 23^{\circ}51'47'',6$.

71. $c = 3,490068$; $B = 35^{\circ}29'34'',8$; $C = 50^{\circ}58'$.

72. $b = 1,596846$; $A = 37^{\circ}36'',9$; $B = 25^{\circ}42'',1$.

73. $a = 8125,756$; $A = 97^{\circ}26'26'',3$; $B = 42^{\circ}39'0'',7$.

Рѣшить треугольникъ по двумъ сторонамъ и углу между ними:

74. $a = 10$; $b = 8$; $C = 29^{\circ}37'24''$.

75. $a = 345$; $b = 120$; $C = 48^{\circ}45'23'',86$.

76. $a = 1,85$; $c = 2,6$; $B = 43^{\circ}56'38''$.

77. $a = 1,4268$; $b = 1,4249$; $C = 151^{\circ}47'53'',06$.

78. $b = 8$, $c = 10,705$; $A = 68^{\circ}53'45'',5$.

79. $b = 0,75$; $a = 0,68039$; $C = 7^{\circ}17'36'',6$.

80. $a = 12,85$; $c = 7,96947$; $B = 92^{\circ}4'57'',8$.

81. $a = 0,456948$; $b = 1$; $C = 148^{\circ}28'',4$.

82. $b = 56,75$; $c = 40,6586$; $A = 50^{\circ}45''$.

83. $c = 0,06756$; $a = 8,96$; $B = 67^{\circ}18'17'',9$.

Рѣшить треугольникъ по тремъ сторонамъ:

84. $a = 47$; $b = 31$; $c = 20$.

85. $a = 450$; $b = 300$; $c = 310$.

86. $a = 25$; $b = 38$; $c = 40,796$.

87. $a = 1000$; $b = 1248$; $c = 2082$.

88. $a = 0,66$; $b = 0,47569$; $c = 0,3$.

89. $a = 0,96$; $b = 2,5$; $c = 1,8535$.

90. $a = 3,472$; $b = 2,8$; $c = 3,00836$.

91. $a = 0,4567$, $b = 1$; $c = 0,970086$.

92. $a = 127,85$; $b = 168,459$; $c = 50$.

93. $a = 2\frac{11}{18}$; $b = 4,8$; $c = 3,95678$.

94. $a = 10$; $b = 12,756$; $c = 11,4787$.

95. $a = 5,1659$, $b = 7,813$; $c = 9,40008$.

96. $a = 34,7$; $b = 17$; $c = 60$.

97. $a=0,45; b=1; c=0,15.$

98. $a=\sqrt{5}; b=\sqrt{13}; c=\sqrt{2}.$

99. $a=\sqrt{3}; b=2; c=\sqrt{5}.$

Рѣшить треугольникъ по двумъ сторонамъ и углу, противолежащему одной изъ нихъ:

100. $a=486; b=812; B=21^{\circ}35'4''.$

101. $a=1,86; b=1,754; A=47^{\circ}12'18''.$

102. $a=13,5; c=8,00627; A=58^{\circ}42'16'',8.$

103. $b=1; c=1,408508; C=148^{\circ}28'',4.$

104. $a=345; c=280,7817; A=112^{\circ}29'55'',06.$

105. $a=126,759; c=40,16607; A=123^{\circ}40'38'',16.$

106. $a=0,1310983; b=0,1; c=80^{\circ}22'7'',15.$

107. $a=352; b=300; B=25^{\circ}26'47'',8.$

108. $a=9,7068; b=8,64; B=38^{\circ}14'29'',17.$

109. $a=198,3708; c=268,84; A=24^{\circ}23'44'',28.$

110. $a=134,17; b=82,51; B=52^{\circ}19'18'',4.$

111. $c=40,6584; b=57; c=45^{\circ}48'30'',6.$

112. $a=0,28; b=1,35; A=16^{\circ}18'17''.$

Рѣшить треугольникъ, безъ помощи логарифмовъ, когда дано:

113. $b=30; A=30^{\circ}; C=105^{\circ}.$

114. $a=12,8; A=45^{\circ}; B=60^{\circ}.$

115. $a=10; A=32^{\circ}30'; B=60^{\circ};$ найти $b.$

116. $a=8; b=16; C=60^{\circ}.$ 117. $c=3; b=3\sqrt{2}; A=45^{\circ}.$

118. $c=\sqrt{3}-1; b=2; c=135^{\circ}.$

119. $a=8; c=4\sqrt{6}; B=15^{\circ}.$

120. $a=2; b=1+\sqrt{3}; c=\sqrt{6}.$

121. $a=2\sqrt{3}; b=3-\sqrt{3}; c=3\sqrt{2}.$

122. По сторонамъ a и углу α ромба, опредѣлить его діагонали.
 $a=1864$ арш. и $\alpha=40^{\circ}13'51'',7.$

123. По діагонали d и углу α между діагоналями прямоугольника, найти его стороны и площадь. $d=0,756$ и $\alpha=41^{\circ}47'',8.$

124. Уголь при вершинѣ равносторонняго треугольника раздѣлять на три равныя части, отчего противоположный бокъ a раздѣлится тоже на три части. Найти эти части. $a=1000.$

125. По радиусу r круга и центральному углу α , вычислить соответствующую углу хорду и разстояніе этой хорды до центра круга. $r=125$ и $\alpha=101^{\circ}47'29'',5.$

126. По центральному углу α и соответствующей ему хордѣ a , опредѣлить радиусъ этого круга. $\alpha = 85^{\circ}35'45'',7$ и $a = 42,9276$.

127. Изъ точки, отстоящей отъ центра круга на a , этотъ кругъ видѣнъ подъ угломъ α . Найти радиусъ круга. $\alpha = 0,489686$ и $a = 124^{\circ}13'17'',7$.

128. Въ кругѣ радиуса r проведена хорда a . Вычислить уголъ между касательными, проведенными къ кругу чрезъ концы хорды. $r = 10,3$, $a = 6,24967$.

129. Въ кругѣ, хорда $AB = 5,275$ метра, а хорда AC , стягивающая дугу, вдвое большую AB , равна 4,12 метра. Найти радиусъ этого круга съ точностью до одного миллиметра.

130. Какой долженъ быть радиусъ круга, чтобы разность между еѣ дугою въ 80° и соответствующею ей хордою была бы менѣе 0,001 саж.

131. Расстояніе между центрами двухъ круговъ радиусовъ R и r равно a . Найти уголъ, составлен. внѣшними касательными и уголъ составленный внутренними касательными къ этимъ кругамъ.

132. Площадь квадрата, построеннаго на гипотенузѣ въ $m = 145$ разъ болѣе площади квадрата, построеннаго на одномъ изъ катетовъ. Найти углы треугольника.

133. Давъ уголъ A ; изъ точки, взятой на одной изъ сторонъ, опустимъ перпендикуляръ на другую сторону; изъ основанія этого перпендикуляра опустимъ перпендикуляръ на первую сторону; изъ основанія этого перпендикуляра опустимъ перпендикуляръ на вторую сторону и т. д. Опредѣлить сумму этихъ перпендикуляровъ, когда длина перваго изъ нихъ есть a .

134. Опредѣлить радиусъ параллельнаго круга земнаго шара, находящагося подъ широтою φ . $R = 858$ геогр. миль, $\varphi = 24^{\circ}25'$.

135. На какой широтѣ градусъ параллельнаго круга равенъ a . R , т. е. рад. земли, $= 6377,4$ километра, $a = 100$ километр.

136. Два мѣста A и B лежатъ подъ φ° южной широты и имѣютъ a° и b° восточной долготы. Найти расстояние между A и B .

137. Пусть s и v означаютъ поверхность и объемъ конуса; h — высоту, r — радиусъ основанія; l — образующую; α уголъ наклонности образующей къ основанію и 2β уголъ при вершинѣ. Найти s и v , когда дано: I) r и α ; II) h и α и III) a и β .

138. Опредѣлить видимую часть поверхности шара, подъ угломъ 2α , изъ точки, отстоящей отъ центра шара на a .

139. Опредѣлить поверхность земнаго пояса, лежащаго между сѣверными широтами φ и φ' , полагая $R = 858$ геогр. мил., $\varphi = 38^\circ$ и $\varphi' = 20^\circ 16'$.

140. Опредѣлить объемъ отъ обращенія сектора AOB около радиуса $OA = R$, когда центральный уголъ $AOB = \alpha$. $R = 3$ футамъ и $\alpha = 23^\circ 37'$.

Рѣшить прямоугольный треугольникъ (141—148):

141. По суммѣ s катета съ гипотенузою и острому углу A .

142. По гипотенузѣ c и разности d катетовъ.

143. По гипотенузѣ c и суммѣ s катетовъ.

144. По острому углу A и суммѣ s или разности d катетовъ.

145. По периметру $2p$ и острому углу A .

146. По острому углу A и разности d между суммою катетовъ и гипотенузою.

147. По суммѣ s катетовъ и радиусу r вписаннаго круга.

148. По радиусу r вписаннаго круга и острому углу A .

149. Найти радиусъ вписаннаго круга въ прямоугольный треугольникъ, когда дано: I) катеть a и уголъ A и II) гипотенуза c и уголъ A .

150. Въ параллелограммѣ дана діагональ d и углы φ и ψ , составленные ею съ боками параллелограмма. Найти его стороны. $d = 15,6249$, $\varphi = 62^\circ 17'$ и $\psi = 24^\circ 45' 36''$.

151. Въ трапеціи даны основанія: $a = 1,02458$ и $b = 0,567$; одна изъ ненаравельныхъ сторонъ $c = 1,2$ и уголъ $\varphi = 36^\circ 27' 23'',5$ между a и c . Вычислить: остальную сторону и другой уголъ при основаніи a .

152. Найти діагонали параллелограмма, въ кот. даны двѣ стороны: $a = 8,42625$, $b = 5,46$ и уголъ $\alpha = 32^\circ 33' 37'',8$ между ними.

153. Въ равнобочной трапеціи дано: основаніе $a = 0,926$, прилежащій къ нему уголъ $\alpha = 83^\circ 5' 16'',4$ и діагональ $d = 1,3$. Найти остальныя части.

154. По двумъ діагоналямъ $d = 1,056$ и $d' = 1,28$, и сторонѣ $a = 0,4$ параллелограма, вычислить уголъ между діагоналями.

155. Даны три круга, касающіеся попарно. Найти углы, составленные линіями центровъ, если радиусы круговъ. r , r' и r'' .

156. Въ кругѣ радиуса r проведена хорда $AB = a$, кот. продолжена на $BC = b$. Изъ точки C проведемъ сѣкущую CXY въ кругу

такъ, чтобы большая дуга $AУ$ была вдвое болѣе меньшей BX .
Найти уголъ $ACУ$.

157. Сѣкущая и касательная къ кругу составляютъ уголъ α ; радиусъ вершины сѣкущей равенъ b , а внутренний равенъ a . Найти радиусъ окружности и длину хорды, соединяющей точку касанія съ концомъ сѣкущей.

158. Изъ остроугольнаго ABC даны діагонали: $AC = 8$ и $BD = 10$, сторона $b = 6,40314$; углы: $BCD = 88^\circ 51' 13'', 9$ и $C'D = 60^\circ 21' 2$. Найти остальные части четырехугольника.

159. Найти косугольный треугольникъ, когда дано (159 — 178):

159. $a + b = s$, c и C .

160. $a - b = d$, c и C .

161. $a + b = s$, A и C .

162. $a - b = d$, A и B .

163. a , b и m_c — длина равнодѣлящей угла C .

164. A , B и m_a — длина равнодѣлящей угла A .

165. $a + b = s$, c и A .

166. $a - b = d$, c и A .

167. $a + b = s$, c и $A - B = \hat{\delta}$.

168. $a - b = d$, c и $A - B = \hat{\delta}$.

169. $a + b + c = 2p$, A и B .

170. $a + b - c = d$, A и B .

171. $a + b + c = 2p$, h и A .

172. $h_c - h_a = d$, A и C^* .

173. $h_a + h_c = s$, b и B .

174. h_a , h_b и h_c .

175. $b + c = s$, h_a и A .

176. $b - c = d$, a и h .

177. a , h_c и $B - C = \hat{\delta}$.

178. A , $a + b = s$ и $a + c = t$.

179. Показать, что длина перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины C въ треугольникъ ABC на противоположную сторону, равна

$$\frac{ab}{2} \frac{a \sin A + b \sin B + c \sin C}{ab \cos A + ac \cos B + bc \cos A}$$

180. Опредѣлить поверхность и объемъ параллелепипеда, въ которомъ три смежныя ребра a , b и c и три угла между ними: $\angle(ab) = \alpha$, $\angle(ac) = \beta$ и $\angle(bc) = \gamma$.

II Задачи на рѣшеніе треугольниковъ по пятизначнымъ таблицамъ логарифмовъ.

181. Найти прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ и острому

углу

181. $c = 38$; $A = 48^\circ 39'$.

182. $c = 100$; $A = 17^\circ 29' 36''$.

183. $c = 480$, $B = 30^\circ 48''$.

184. $c = 57,28$; $A = 39^\circ 17' 18''$.

h означаетъ высоту треугольника, опущенную на сторону a .

185. $c = 4,5486; A = 24^{\circ}44'47''$.

186. $c = 0,000564; B = 60^{\circ}51'28''$.

187. $c = 0,084868; A = 29^{\circ}9'51''$.

188. $c = 396288; B = 56^{\circ}30'9''$.

189. $c = 0,69479; B = 6^{\circ}48'25''$.

190. $c = 2\frac{7}{9}; B = 38^{\circ}17'27''$.

Рѣшить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ и катету:

191. $c = 100; a = 57$.

192. $c = 12; b = 4,92$.

193. $c = 1,45; b = 0,478$.

194. $c = 6849; a = 4569$.

195. $c = 50,6; b = 47,8126$.

196. $c = 0,0014; a = 0,000847$.

197. $c = 121478; a = 56948$.

198. $c = 1; a = 0,0142768$.

199. $c = 0,94967; b = 0,8$.

200. $c = 1,248; a = 0,56488$.

201. $c = 30; a = 29^*$.

202. $c = 0,5; b = 0,48987$.

203. $c = 17; a = 16,854$.

204. $c = 0,08; b = 0,079249$.

Рѣшить прямоугольный треугольникъ по катету и острому углу:

205. $a = 75; A = 24^{\circ}24'30''$.

206. $a = 396; B = 49^{\circ}42''$.

207. $b = 1000; B = 61^{\circ}50'28''$.

208. $b = 1,4; A = 58^{\circ}6'23''$.

209. $a = 0,001; A = 8^{\circ}17'12''$.

210. $a = 0,84217; B = 34^{\circ}47'44''$.

211. $b = 0,092172; B = 10^{\circ}34'47''$.

212. $b = 426878; A = 19^{\circ}9''$.

213. $a = 54,527; A = 36^{\circ}54'32''$.

214. $b = 0,57182; B = 80^{\circ}35'52''$.

Рѣшить прямоугольный треугольникъ по катетамъ:

215. $a = 62; b = 87$.

216. $a = 15; b = 10,7$.

217. $a = 0,0487; b = 0,145$.

218. $a = 3; b = 2,08286$.

219. $a = 5468; b = 148627$.

220. $a = 0,28; b = 0,982876$.

221. $a = 1,2; b = 4,00073$.

222. $a = 0,086477; b = 0,16$.

223. $a = 10,246; b = 9,964$.

224. $a = 0,0084; b = 0,028247$.

Рѣшить равнобедренный треугольникъ, въ ког. b — основаніе и h — высота:

225. $a = 14,268; A = 67^{\circ}28'24''$.

226. $a = 1,5689; C = 38^{\circ}39'41''$.

227. $c = 0,24687; B = 46^{\circ}3'26''$.

228. $b = 0,47; A = 29^{\circ}59'28''$.

229. $b = 43,848; B = 41^{\circ}45'28''$.

230. $a = 0,96192; b = 0,75$.

231. $a = 0,0496; h = 0,0184968$.

232. $b = 15,6428; h = 4,96$.

233. $h = 0,94866; A = 35^{\circ}35'28''$.

234. $h = 1126,78; B = 52^{\circ}53'59''$.

* 201—204 зад. надо рѣшить по формулѣ § 127.

Рѣшить треугольникъ по сторонамъ и двумъ угламъ:

235. $b = 0,1$; $B = 48^{\circ}46'$; $C = 50^{\circ}51'52''$.
 236. $a = 2,65$; $B = 48^{\circ}49'16''$; $C = 20^{\circ}35'14''$.
 237. $c = 0,068348$; $A = 100^{\circ}$; $B = 68^{\circ}43'8''$.
 238. $a = 10,459$; $B = 60^{\circ}16'$; $C = 32^{\circ}25'39''$.
 239. $b = 0,854968$; $A = 100^{\circ}28'36''$; $C = 60^{\circ}26''$.
 240. $a = 206,75$; $A = 87^{\circ}6'58''$; $B = 45^{\circ}17'8''$.
 241. $a = 45,009$; $B = 16^{\circ}15''$; $C = 23^{\circ}51'48''$.
 242. $c = 3,49007$; $B = 35^{\circ}29'35''$; $C = 50^{\circ}58'$.
 243. $b = 1,5968$; $A = 37^{\circ}37''$; $B = 25^{\circ}42''$.
 244. $a = 8125,76$; $A = 97^{\circ}26'26''$; $B = 42^{\circ}39'1''$.

Рѣшить треугольникъ по двумъ сторонамъ и углу между ними:

245. $a = 10$; $b = 8$; $C = 29^{\circ}37'24''$.
 246. $a = 345$; $b = 120$; $C = 48^{\circ}45'24''$.
 247. $a = 50$; $b = 45$; $C = 113^{\circ}51'36''$.
 248. $a = 1,85$; $c = 2,6$; $B = 43^{\circ}56'38''$.
 249. $b = 8$; $c = 10,705$; $A = 68^{\circ}53'45''$.
 250. $b = 0,75$; $a = 0,68039$; $C = 7^{\circ}17'36''$.
 251. $a = 12,85$; $c = 7,9695$; $B = 92^{\circ}4'58''$.
 252. $a = 0,45695$; $b = 1$; $C = 148^{\circ}28''$.
 253. $b = 56,75$; $c = 40,6586$; $A = 50^{\circ}45''$.
 254. $a = 8,96$; $c = 0,06756$; $B = 67^{\circ}18'18''$.

Рѣшить треугольникъ по тремъ сторонамъ:

255. $a = 47$; $b = 31$; $c = 20$. 256. $a = 450$; $b = 300$, $c = 310$.
 257. $a = 25$; $b = 88$; $c = 40,796$.
 258. $a = 0,03$; $b = 0,04$; $c = 0,0247$.
 259. $a = 0,96$; $b = 2,5$; $c = 1,8536$.
 260. $a = 0,47$; $b = 0,625$; $c = 0,51786$.
 261. $a = 1000$; $b = 1248$; $c = 2082$.
 262. $a = 3,472$; $b = 2,8$; $c = 3,00836$.
 263. $a = 2\frac{11}{13}$; $b = 4,8$; $c = 3,95677$.
 264. $a = 34,7$; $b = 17,24$; $c = 60,8$.

Рѣшить треугольникъ по двумъ сторонамъ и углу, противолежащему одной изъ нихъ:

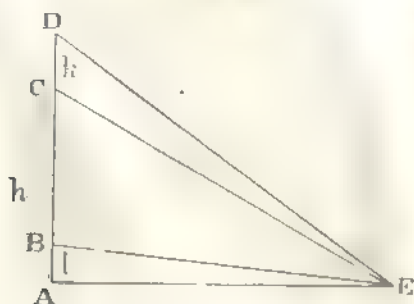
265. $a = 13,5$; $c = 8$; $A = 58^{\circ}42'17''$.
 266. $a = 0,131$; $b = 0,1$; $A = 80^{\circ}22'7''$.
 267. $a = 1,86$; $b = 1,754$; $A = 47^{\circ}12'18''$.

268. $b = 1$; $c = 1,4085$; $C = 148^{\circ}28''$.
 269. $a = 345$; $c = 280,78$; $A = 112^{\circ}29'55''$.
 270. $a = 9,7$; $b = 8,64$; $B = 38^{\circ}14'29''$.
 271. $a = 352$; $b = 300$; $B = 25^{\circ}26'48''$.
 272. $a = 198,37$; $c = 265,84$; $A = 24^{\circ}23'44''$.
 273. $a = 134$; $b = 82,51$; $B = 52^{\circ}19'18''$.
 274. $a = 2148$; $c = 984,9$; $C = 45^{\circ}25'16''$.

Задачи на X отдѣль.

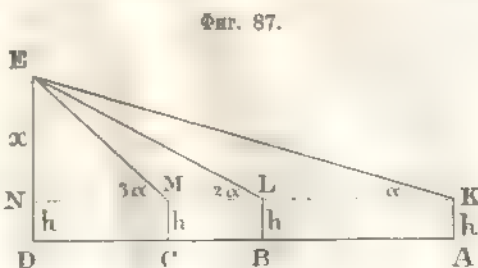
1. Башня въ $a = 34,5$ метра бросаетъ тѣнь въ $b = 41$ метръ. Опредѣлить высоту солнца.
 2. Солнце находится на высотѣ $\alpha = 56^{\circ}40'$ надъ горизонтомъ. Какой длины тѣнь отъ дерева, вышиною $h = 15$ саж.?
 3. Маякъ, вышиною въ 98 футъ, видѣнъ съ корабля подъ угломъ въ $4^{\circ}25'48''$. Опред. разстояние корабля до маяка, полагая, что глазъ наблюдателя и основаніе маяка въ одной горизонтальной плоскости.
 4. Рѣшить задачу § 149, когда $b = 445$ ф., $A = 42^{\circ}$ и $C = 60^{\circ}28'$.
 5. Рѣшить задачу § 149, когда $b = 312,72$ саж., $A = 50^{\circ}46'38''$ и $C = 29^{\circ}24'$.
 6. Рѣшить задачу § 149, когда $b = 250$ футъ, $\angle ACB = 41^{\circ}$, $\angle BCD = 15^{\circ}16'$, $\angle BDA = 50^{\circ}$ и $\angle ADC = 10^{\circ}20'$.
 7. Рѣшить задачу § 149, когда $b = 160$ саж., $\angle ACD = 82^{\circ}17'30''$, $\angle BCD = 23^{\circ}29'30''$, $\angle BDA = 42^{\circ}$ и $\angle ADC = 60^{\circ}46'$.
 8. Рѣшить задачу § 150, когда $a = 220$ саж., $c = 150$ саж., $\alpha = 12^{\circ}18'$, $\beta = 10^{\circ}$ и $\gamma = 125^{\circ}$.
 9. Рѣшить задачу § 150, когда $AB = 400$ фут., $BC = 348$ фут., $AC = 624$ фут., $\alpha = 20^{\circ}34'$ и $\beta = 25^{\circ}25'$.

Фиг. 86.



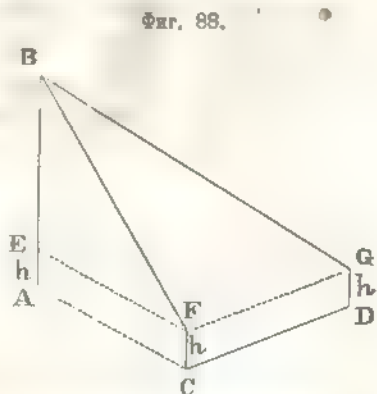
— 10. На берегу рѣки возвышается колонна, на кот. находится статуя. Наблюдатель, находящ. на противоположномъ берегу, видитъ подъ однимъ и тѣмъ же угломъ статую и часоваго, стоящаго у подножія колонки. Найти ширину рѣки, если высота колонны, статуи и часоваго суть: h , k и l .

11. Последовательно изъ трехъ точекъ A , B и C , по направленію въ башнѣ DE , опредѣляютъ угловую высоту этой башни. Найти высоту башни, когда $AB = a$, $BC = b$; угловая высота въ точкѣ B вдвое болѣе угловой высоты въ A , а угловая высота въ точкѣ C втрое болѣе, чѣмъ въ A (h высота инструмента).



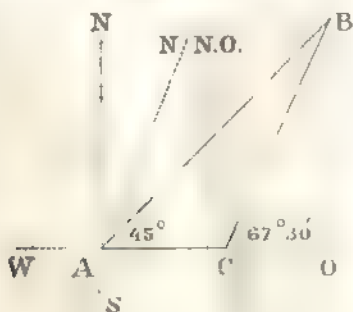
Фиг. 87.

12. Чтобы измѣрить высоту горы AB , гдѣ B ея вершина, выбираютъ двѣ точки C и D приблизительно въ одной горизонтальной плоскости съ A . Измѣряютъ разстояніе $CD = b$ и угловую высоту горы, т. е. $\angle BFE = \alpha$; также измѣряютъ углы $BFG = \beta$ и $BGF = \gamma$. Найти высоту горы (h высота инструмента = 4,5 ф.) $b = 1548$ футъ, $\alpha = 42^\circ 28'$, $\beta = 100^\circ 34'$, $\gamma = 51^\circ$.

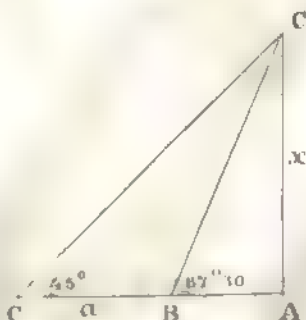


Фиг. 88.

13. Направленіе маяка B (фиг. 89) относительно корабля, находящегося въ A , было сначала $N. O.$ *); но когда корабль прошелъ



Фиг. 89.



Фиг. 90.

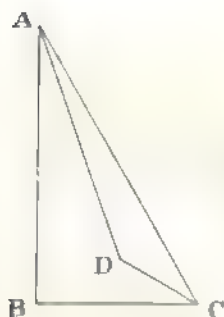
*) Северо-востокъ.

на востокъ разстояніе $AC = a$, то маякъ былъ уже по направле-
нію $N.N.O$ относительно корабля. Найти разстояніе корабля отъ
маяка въ обонхъ его положеніяхъ.

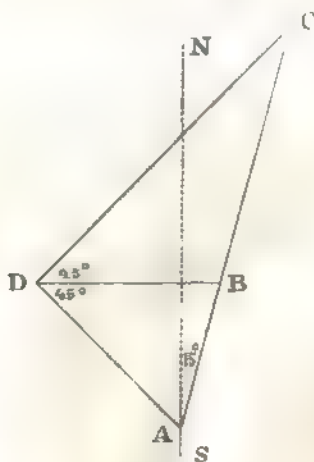
14. Съ корабля, находящагося въ A (фиг. 90), видятъ два маяка
 B и C на западъ; но черезъ часъ плаванія къ сѣверу, оба эти
маяка уже видны: одинъ на юго-западъ, а другой на юго-юго-западъ
отъ корабля. Зная, что разстояніе между маяками равно a , найти
скорость хода корабля.

15. Угловая высота горы AB (фиг. 91) въ точкѣ C , находя-
щейся съ B въ одной горизонтальной плоскости, равна 60° . Изъ
точки C идутъ къ вершинѣ A по тропинкѣ, составляющей съ го-
ризонтомъ уголъ въ 30° и, пройдя километръ, останавливаются
въ точкѣ D . Найти высоту горы, если $\angle ADC = 135^\circ$.

Фиг. 91.

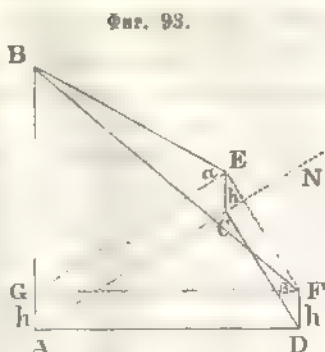


Фиг. 92.

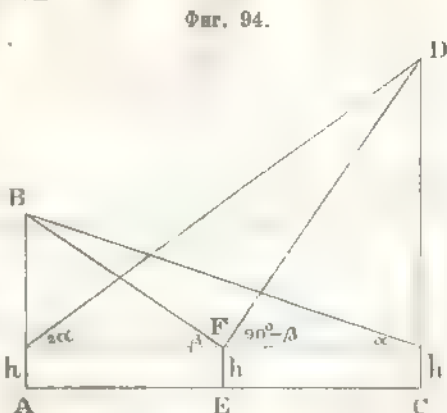


16. Корабль плыветъ на сѣверъ; когда онъ достигнетъ A (фиг. 92),
то съ него видно по одному направленію два маяка B и C , подъ
угломъ въ 15° къ $N.S.$; но съ мѣста A корабль измѣняетъ направ-
леніе и плыветъ на сѣверо-западъ и когда пройдетъ $AD = a$ миль,
то одинъ маякъ будетъ на востокъ, а другой на сѣверо-востокъ
относительно корабля. Найти разстояніе между маяками B и C .

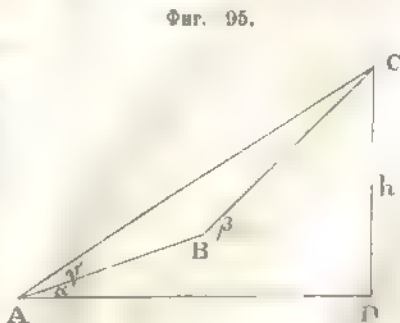
17. Наблюдатель, стоящій въ C на сѣверъ башни AB , опредѣляетъ α ея угловую высоту; потомъ съ этого мѣста, идетъ на востокъ и, пройдя расстояние b отъ перваго мѣста, останавливается въ D ; въ этомъ мѣстѣ онъ также опредѣляетъ β угловую высоту башни. Найдите расстояние отъ башни до перваго мѣста и высоту башни.



18. На горизонтальной поверхности стоятъ двѣ башни: AB и CD въ разстояніи a . Если станемъ по очередно у подошвы каждой изъ нихъ, то найдемъ, что угловая высота одной будетъ вдвое болѣе другой; а если станемъ на срединѣ разстоянія между башнями, то угловая высота одной будетъ служить дополненіемъ до прямого угла угловой высотѣ другой башни. Найдите высоты башенъ.



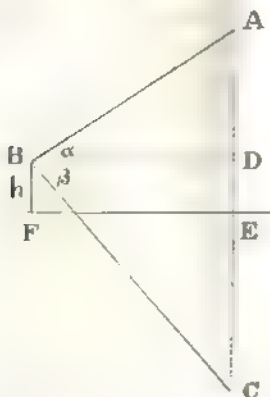
19. Наблюдатель, всходитъ на гору по тропинкѣ ABC , составляющей кратчайшій путь отъ основанія къ вершинѣ; эта тропинка наклонена сначала подъ угломъ α къ горизонту, но потомъ вдругъ наклоненіе ея увеличивается и равно β . Высота h горы была уже опредѣлена ранѣе помощію барометра, а угловая высота горы для мѣста A , откуда наблюдатель сталъ подниматься, есть γ . Найдите длину тропинки.



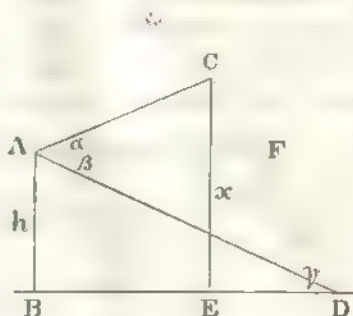
Найдите длину тропинки.

20. Наблюдатель, стоящий въ F (фиг. 96) на берегу озера, опредѣляетъ α угловую высоту тучи и β угловое пониженіе отраженія тучи въ озерѣ. Если h будетъ высота глаза надъ поверхностью озера, то какая высота тучи отъ поверхности озера?

Фиг. 96.

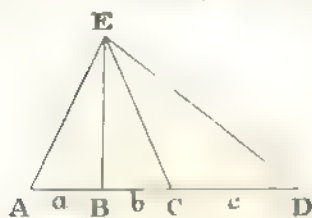


Фиг. 97.



21. Въ полдень, наблюдатель, стоящий на скалѣ въ A (фиг. 97), высотой h метровъ надъ поверхностью моря, находитъ α угловую высоту сѣверной оконечности облака въ плоскости меридіана и β угловое пониженіе тѣни этой самой оконечности. Какая высота тучи надъ поверхностью моря, если угловая высота солнца въ полдень есть γ ?

Фиг. 98.



кот. видны отрѣзки a , b и c .

22. Четыре точки A , B , C и D лежатъ на одной прямой, находящейся въ горизонтальной плоскости. Глазъ наблюдателя, помѣщенный въ точкѣ E той же плоскости, видитъ отрѣзки: $AB = a$, $BC = b$ и $CD = c$ подъ однимъ и тѣмъ же угломъ. Найти разстояніе точки E до A , B , C и D , и уголъ, подъ

Задачи на XI Отдѣлъ.

Опредѣлить площадь прямоугольнаго треугольника, когда дано *):

1. $c = 8$; $A = 57^\circ 42' 36''$. 2. $a = 0,234786$; $A = 23^\circ 48', 09$.

*) c — гипотенуза; a и b катеты.

3. $b = 4,72689$; $A = 58^{\circ}47'30'',28$.

Опредѣлить площадь треугольника, когда дано:

4. $a = 0,456948$; $b = 1$; $C = 148^{\circ}28'',4$.

5. $b = 56,75$; $c = 40,6586$; $A = 50^{\circ}45''$.

6. $a = 8,96$; $c = 0,06756$; $B = 67^{\circ}18'17'',3$.

7. $a = 45,0086$; $B = 16^{\circ}14'',85$; $C = 23^{\circ}51'47'',6$.

8. $b = 1,596846$; $A = 37^{\circ}36'',9$; $B = 25^{\circ}42'',1$.

9. $a = 206,7549$; $A = 87^{\circ}6'58'',28$; $B = 45^{\circ}17'8''$.

10. $a = 13,5$; $c = 8,00627$; $A = 58^{\circ}42'16'',8$.

11. $b = 1$; $c = 1,408508$; $C = 148^{\circ}28'',4$.

12. $a = 0,6$; $b = 2,7028$, $A = 26^{\circ}35'47''$.

13. $a = 0,96$; $b = 2,5$; $c = 1,8535$.

14. $a = 10$; $b = 12,756$; $c = 11,4737$.

15. $a = 0,66$; $b = 0,47569$; $c = 0,3$.

16. $h = 1,8$; $A = 25^{\circ}19'$; $B = 38^{\circ}20'35''$.

Показать, въ задачахъ отъ 17 до 25, что площадь треугольника равна:

17. $\frac{1}{4}(a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A)$. 18. $\frac{a^2 - b^2}{2} \frac{\sin A \sin B}{\sin(A - B)}$

19. $p(p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}$. 20. $(p - b)(p - c) \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$.

21. $\frac{2abc}{a + b + c} \cdot \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$. 22. $\frac{abc}{p - c} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.

23. $2p^2 \sin A \sin B \sin C$
($\sin A + \sin B + \sin C$)². 24. $p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}$.

25. $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \left(\frac{a^2}{\sin A} + \frac{b^2}{\sin B} + \frac{c^2}{\sin C} \right)$.

26. Найти площадь трапеціи $ABCD$ по параллельнымъ сторонамъ: $AD = a$ и $BC = b$, и угламъ A и B .

27. Определить сторону и площадь правильного многоугольника, имѣющаго 40 сторонъ и вписаннаго въ кругъ, котораго радиусъ равенъ 5,16 аршина.

28. Определить периметръ и площадь правильного 75-угольника, вписаннаго въ кругъ, котораго радиусъ равенъ $2\frac{1}{2}$ сажени.

29. Определить площадь и сторону правильного тридцатиугольника, описаннаго около круга, котораго радиусъ равенъ 0,68 саж.

30. Определить площадь и периметръ правильного девятиугольника, описаннаго около круга, котораго радиусъ равенъ 4,5 фута.

31. Определить площадь правильного шестидесятиугольника, котораго сторона равна 0,7 аршина.

32. Определить радиусы вписаннаго и описаннаго круга около правильного 36-угольника, котораго сторона равна 4 метрамъ.

33. Определить радиусы вписаннаго и описаннаго круга около правильного 25-угольника, котораго периметръ равенъ 3,675 саж.

34. Определить площадь сегмента по соответствующей ему дугѣ $\alpha = 50^\circ$ и радиусу дуги $r = 2$ аршинамъ.

35. Определить площадь сегмента по соответствующей ему дугѣ $\alpha = 135^\circ 40' 16''$ и хордѣ $a = \frac{1}{2}$ фута, стягивающей дугу α .

Въ треугольникѣ ABC пусть O означаетъ центръ описаннаго круга; I, I', I'' и I''' — центры вписаннаго и вневписанныхъ круговъ; R — радиусъ описаннаго круга; r, r_a, r_b и r_c — радиусы вписаннаго и вневписанныхъ круговъ, касающихся сторонъ a, b и c ; q — площадь треугольника.

Показать:

$$36. AI = (p - a) \sec \frac{A}{2}; \quad AI' = p \sec \frac{A}{2};$$

$$AI'' = (p - c) \operatorname{cosec} \frac{A}{2} \quad \text{и} \quad AI''' = (p - b) \operatorname{cosec} \frac{A}{2}.$$

$$37. II' = a \sec \frac{A}{2} - 4R \sin \frac{A}{2}; \quad II'' = c \operatorname{cosec} \frac{C}{2} - 4R \cos \frac{C}{2}.$$

$$38. r_a = r \operatorname{tg}^2 \frac{\pi - A}{4}. \quad 39. r_a = r \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

$$40. \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{r_a - r}{4R}. \quad 41. \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{r_a + r}{4R}. \quad 42. \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{rr_a}{r_b r_c}.$$

$$43. R = \frac{p}{4} \sec \frac{A}{2} \sec \frac{B}{2} \sec \frac{C}{2} = \frac{p - a}{4} \operatorname{cosec} \frac{B}{2} \operatorname{cosec} \frac{C}{2} \sec \frac{A}{2}.$$

$$44. r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = p \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

$$45. r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2} = (p - b) \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = (p - c) \operatorname{ctg} \frac{B}{2}.$$

$$46. q = p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}. \quad 47. q = r^2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

48. $q = r_a^2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}$. 49. $q = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

50. $q = r r_a \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = r_b r_c \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{r_a r_b r_c}$.

51. $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$. 52. $r_a = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

53. $r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c = p^2$. 54. $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$.

55. $R = \frac{r_a + r_b + r_c - r}{4}$. 56. $\sqrt{r_a r_b} + \sqrt{r_a r_c} + \sqrt{r_b r_c} = r$.

57. $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 4R \sin A \sin B \sin C$.

58. $a \operatorname{ctg} A + b \operatorname{ctg} B + c \operatorname{ctg} C = 2(R + r)$.

59. Рѣшить треугольникъ по периметру его $2p$, углу A и площ. q .

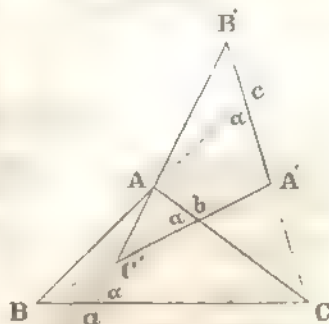
60. Рѣшить треугольникъ по разности квадратовъ сторонъ a и b , углу C и площади q .

61. Рѣшить треугольникъ по суммѣ квадратовъ его сторонъ, углу A и площади q .

62. Черезъ вершины A, B и C (фиг. 99) въ треугольникѣ ABC проведемъ прямыя Aa, Bb и Cc подъ однимъ

Черт. 99.

и тѣмъ же угломъ α къ противоположнымъ сторонамъ; эти прямыя въ пересѣченіи составятъ треугольникъ $A'B'C'$. Найти отношеніе площадей треугольниковъ $A'B'C'$ и ABC .



63. Данъ треугольникъ ABC ; пусть A', B' и C' означаютъ точки касанія вписаннаго круга въ этотъ треугольникъ съ боками: BC, AC' и AB . Найти отношеніе площадей треугольниковъ

$A'B'C'$ и ABC , а также радиусовъ описанныхъ круговъ около этихъ треугольниковъ

64. Изъ вершинъ A, B и C въ треугольникѣ ABC опустимъ перпендикуляры: AA', BB' и CC' на противоположныя стороны. Найти отношеніе площадей треугольниковъ $A'B'C'$ и ABC , а также радиусовъ вписанныхъ и описанныхъ около нихъ круговъ.

65. На каждой сторонѣ правильнаго многоугольника отложимъ, въ томъ же направленіи, часть b , и полученныя смежныя точки

соединимъ прямыми; тогда получимъ тоже правильный многоугольникъ. Если означимъ чрезъ a , n , α и m сторону даннаго многоугольника, число его сторонъ, уголъ между двумя боками этихъ многоугольниковъ, направленныхъ одинаково, и отношеніе площадей перваго ко второму, то

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n} - \alpha\right) = \frac{2b - a}{a} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}, \quad m = \cos^2 \frac{\pi}{n} : \cos^2 \left(\frac{\pi}{n} - \alpha\right).$$

Рѣшить треугольничъ, когда дано (66 — 80):

66. R , A и B . 67. r , A и B . 68. r_a , A и B . 69. r , r_a , r_b и r_c .

70. R , A и p . 71. r , A и p . 72. r , a и $b + c$. 73. R , r и A .

74. R , r_a и A . 75. r , r_a и A . 76. r_a , r_b и C . 77. r , r_a и R .

78. r_a , r_b и R . 79. q , r и r_a . 80. q , r_a и r_b .

81. Означимъ буквами r и r' радіусы круговъ, вписанныхъ въ данныйъ треугольничъ ABC и въ треугольничъ, у котораго вершины въ центрахъ вѣвписанныхъ круговъ; чрезъ $2p$ и $2p'$ — ихъ периметры. Показать, что

$$r' = \frac{\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}} \quad \text{и} \quad r p' = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Задачи на XII отдѣлъ.

1. Опреѣлить ρ и φ изъ уравненія: $3 + 4\sqrt{-1} - \rho(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)$.

2. Найти: $\sqrt{3}(\cos 12^\circ + \sqrt{-1} \sin 12^\circ)$, $\sqrt{2}(\cos 18^\circ + \sqrt{-1} \sin 18^\circ)$.

3. Найти: $2(\cos 36^\circ + \sqrt{-1} \sin 36^\circ)(\cos 6^\circ - \sqrt{-1} \sin 6^\circ)$.

4. Найти: $\frac{2(\cos 85^\circ + \sqrt{-1} \sin 85^\circ)}{\sqrt{2}(\cos 25^\circ + \sqrt{-1} \sin 25^\circ)}$.

5. Найти: $[4(\cos 12^\circ + \sqrt{-1} \sin 12^\circ)]^2$.

6. Найти: $\sqrt{\cos 16^\circ + \sqrt{-1} \sin 16^\circ}$.

Найти величины:

7. $(-1)^{\frac{1}{2}}$. 8. $(-1)^{\frac{1}{4}}$. 9. $(1 + \sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}$.

Рѣшить уравненія:

10. $x^5 - 4 = 0$. 11. $2x^3 + 3 = 0$. 12. $x^3 - 2 = 2\sqrt{-1}$.

13. $x^6 - 5x^3 + 6 = 0$. 14. $x^6 + 2x^6 + 3x^4 + 2x^2 + 1 = 0$.

15. Дано: $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \vartheta\right) = 0,51$; найти одну изъ приближенныхъ

величинъ ϑ , пренебрегая степенями ϑ , большими четвертой.

16. Опредѣлить $\sin 5^\circ$ и $\cos 10^\circ$ съ точностью до 0,0000001.

17. Показать, что $[\cos \vartheta + \cos \varphi + \sqrt{-1}(\sin \vartheta + \sin \varphi)]^n + [\cos \vartheta + \cos \varphi - \sqrt{-1}(\sin \vartheta + \sin \varphi)]^n = 2^{n+1} \left(\cos \frac{\vartheta - \varphi}{2}\right)^n \cos \frac{n(\vartheta + \varphi)}{2}$.

Найти сумму n членовъ въ каждомъ изъ примѣровъ отъ 18 до 38 включительно:

18. $\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \dots$

19. $\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \dots$

20. $\sin \alpha - \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) - \dots$

21. $\cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) - \dots$

22. $\sin \alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha - \dots$

23. $\sin \alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha - \dots$

24. $\cos \alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha - \dots$

25. $\cos \alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \dots$

26. $\sec \alpha \sec 2\alpha + \sec 2\alpha \sec 3\alpha + \sec 3\alpha \sec 4\alpha + \dots$

27. $\sin^2 \alpha + \sin^2 2\alpha + \sin^2 3\alpha + \dots$

28. $\sin^3 \alpha + \sin^3 3\alpha + \sin^3 5\alpha + \dots$

29. $\cos^2 \alpha + \cos^2 2\alpha + \cos^2 3\alpha + \dots$

30. $\cos^3 \alpha + \cos^3 3\alpha + \cos^3 5\alpha + \dots$

31. $\sin^2 \alpha + \sin^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha + 2\beta) + \dots$

32. $\cos^2 \alpha + \cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + 2\beta) + \dots$

33. $\sin^4 \alpha + \sin^4(\alpha + \beta) + \sin^4(\alpha + 2\beta) + \dots$

34. $\cos^4 \alpha + \cos^4(\alpha + \beta) + \cos^4(\alpha + 2\beta) + \dots$

35. $\cos \alpha \cos(\alpha + \vartheta) + \cos(\alpha + \vartheta) \cos(\alpha + 2\vartheta) + \dots$

36. $\sin(n+1)\alpha \cos \alpha + \sin(n+2)\alpha \cos 2\alpha + \dots$

37. $\sin \alpha \sin 2\alpha + \sin 2\alpha \sin 3\alpha + \sin 3\alpha \sin 4\alpha + \dots$

38. $\sin 3\alpha \sin \alpha + \sin 6\alpha \sin 2\alpha + \sin 9\alpha \sin 3\alpha + \dots$

39. Показать, что $\operatorname{tg} n\alpha = \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin(2n-1)\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos(2n-1)\alpha}$

40. Показать, что

$$\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha} = \operatorname{tg} \frac{n+1}{2} \alpha.$$

41. Показать, что,

$$\frac{\sin \alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha - \dots \text{ } n \text{ членов}}{\cos \alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha - \dots \text{ } n \text{ членов}} = \operatorname{tg} \frac{n+1}{3} (\pi + \alpha).$$

Опредѣлить сумму n членовъ въ рядахъ:

42. $\sin \alpha \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{4} \right)^3 + 4 \sin \frac{\alpha}{4} \left(\sin \frac{\alpha}{8} \right)^4 + \dots$

43. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sec \alpha + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} \sec \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{8} \sec \frac{\alpha}{4} + \dots$

44. $\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{cosec} \alpha + 2 \operatorname{ctg} 2\alpha \operatorname{cosec} 2\alpha + 2^2 \operatorname{ctg} 2^2\alpha \operatorname{cosec} 2^2\alpha + \dots$

45. $\frac{1}{\sin \alpha \sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 2\alpha \sin 3\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha \sin 4\alpha} + \dots$

46. $\frac{1}{\sin \alpha \cos 2\alpha} + \frac{1}{\sin 2\alpha \cos 3\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha \cos 4\alpha} + \dots$

47. $\sin \alpha \sin 3\alpha + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2^2} \sin \frac{3\alpha}{2^2} + \dots$

48. $\frac{1}{\cos \alpha + \cos 3\alpha} + \frac{1}{\cos \alpha + \cos 5\alpha} + \frac{1}{\cos \alpha + \cos 7\alpha} + \dots$

49. $\frac{\sin \alpha}{\cos 2\alpha + \cos \alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} + \frac{\sin 4\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 4\alpha} + \dots$

50. $\frac{\sin \alpha}{1 + 2 \cos \alpha} + \frac{3 \sin 3\alpha}{1 + 2 \cos 3\alpha} + \frac{3^2 \sin 3^2 \alpha}{1 + 2 \cos 3^2 \alpha} + \dots$

51. $\frac{1}{2} \sec \alpha + \frac{1}{2^2} \sec \alpha \sec 2\alpha + \frac{1}{2^3} \sec \alpha \sec 2\alpha \sec 2^2\alpha + \dots$

52. Данный уголъ $ABC = \alpha$ раздѣлимъ на n равныхъ частей прямыми: BD, BE, BF, \dots ; изъ точки D , взятой на сторонѣ BC , опустимъ перпендикуляры на прямыя: BD, BE, BF, \dots, BA . Найти сумму этихъ перпендикуляровъ.

53. Въ кругъ вписанъ правильнѣй многоугольникъ; изъ какой-нибудь точки окружности проведемъ хорды ко всѣмъ вершинамъ многоугольника. Найти сумму квадратовъ этихъ хордъ.

54. Раздѣлимъ окружность на $2n$ равныхъ частей и чрезъ точки дѣлений проведемъ касательныя; изъ какой-либо точки дѣленія

опустимъ перпендикуляры на эти касательныя. Найти сумму квадратовъ этихъ перпендикуляровъ.

55. Въ кругъ радіуса R впишемъ правильный многоугольникъ n сторонами; на одной изъ его сторонъ построимъ рядъ треугольниковъ, имѣющихъ вершины въ вершинахъ даннаго многоугольника. Найти сумму радіусовъ круговъ, вписанныхъ въ эти треугольники.

56. Въ кругъ радіуса R впишемъ правильный многоугольникъ n сторонами; на одной изъ его сторонъ построимъ рядъ треугольниковъ, имѣющихъ вершины въ вершинахъ даннаго многоугольника. Найти сумму площадей круговъ, описанныхъ около этихъ треугольниковъ.

Задачи на XIII отдѣлъ.

Найти наименьшее значеніе:

1. $\arcsin \frac{1}{2}$. 2. $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$. 3. $\arccos -\sqrt{\frac{1}{2}}$. 4. $\operatorname{arctg} -1$.

5. $\arcsin \sqrt[4]{0,8}$. 6. $\arccos (2,365)^{-0,125}$. 7. $\operatorname{arctg} 2$.

8. $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt[10]{0,4}}$. 9. $\operatorname{arcsec} \sqrt[10]{\frac{4}{3}}$. 10. $\operatorname{arc cosec} \frac{2}{\sqrt[5]{0,1}}$.

Опредѣлить x изъ уравненій:

11. $\operatorname{arctg} (x \sqrt{\sin 46^\circ 18''}) = 6^\circ 4' 58'',9$. 12. $\operatorname{arctg} x = \sqrt[40]{\frac{1}{3}}$.

13. $\arcsin x = (1,26)^{-0,8}$. 14. $\arccos x + \sqrt[75]{(0,32)^{16}} = 0$.

Найти:

15. $\arccos (\sin \sqrt{\operatorname{tg} 37^\circ 29' 31''})^{0,8}$. 16. $\operatorname{arctg} \sqrt{\sin 25^\circ 38'',48}$
 $(\cos 48^\circ 35' 24'',3)^{-2,16}$.

17. $\frac{[1,4 - \operatorname{arctg}(0,6)^{0,6}]^{\frac{11}{4}}}{\sqrt{\cos 0,03869}}$ 18. $\operatorname{arctg} \left(\frac{\cos \sqrt[16]{0,4} \cdot 12}{0,9426} \right)^{0,24}$.

19. $\left(\frac{\operatorname{arctg} \sqrt[16]{\pi}}{\sin 0,46} \right)^\pi$. 20. $\operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \sqrt[20]{0,5}}{\cos 16^\circ 19''} \right)^{0,16}$.

$$21. \frac{(\operatorname{arctg} \sqrt{\pi})^{-0,8} \cdot \operatorname{tg} 40^{\circ} 33'}{\sin(0,568)^{\frac{19}{25}}}. \quad 22. \sqrt[38]{\frac{\operatorname{arcsin} \sqrt{0,6}}{(\operatorname{tg} 25^{\circ} 36'')^{1,5}}}$$

$$23. \operatorname{tg} \operatorname{arcsin} \left(\frac{\cos 0,25^{\frac{12}{25}}}{\sqrt{1,006}} \right). \quad 24. \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \sqrt[75]{\frac{\sin \sqrt[16]{0,496}}{\cos 5^{\circ} 6'}}$$

$$25. (\operatorname{arc} \cos 0,8)^{\sin 0,25}. \quad 26. \left(\operatorname{arctg} \cos \frac{1}{\pi} \right)^{\operatorname{arc} \cos \operatorname{tg} \frac{1}{\pi}}$$

Найти величины:

$$27. \sin \left(\operatorname{arc} \sin \frac{1}{2} + \operatorname{arc} \cos \frac{1}{2} \right). \quad 28. \operatorname{tg} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x).$$

$$29. 3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{7} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{26} = \frac{\pi}{4}.$$

Показать:

$$30. \operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{3}. \quad 31. \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

$$32. \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}. \quad 33. \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{3}{4} + \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{1}{7} = \frac{3\pi}{4}.$$

$$34. \operatorname{arc} \cos \frac{1}{2} - \operatorname{arc} \sin \frac{1}{3} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{9\sqrt{3} - 8\sqrt{2}}{5}.$$

$$35. \operatorname{arc} \sin \frac{77}{85} = \operatorname{arc} \sin \frac{3}{5} + \operatorname{arc} \sin \frac{8}{17}.$$

$$36. \operatorname{arccos} \frac{9}{\sqrt{82}} + \operatorname{arc} \cos \frac{\sqrt{41}}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

$$37. \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{7} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

$$38. \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{a} + n(n+1)a \right) = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} (n+1)a - \operatorname{arc} \operatorname{ctg} na.$$

$$39. \operatorname{arc} \operatorname{ctg} (n^2 + n + 1) = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} n - \operatorname{arc} \operatorname{ctg} (n+1).$$

$$40. \operatorname{arc} \operatorname{tg} a = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a-b}{1+ab} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b-c}{1+bc} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} c.$$

$$41. \operatorname{arc} \sin \frac{4}{5} + \operatorname{arc} \sin \frac{5}{13} + \operatorname{arc} \sin \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}.$$

$$42. 3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{4} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{20} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{1985}.$$

$$43. \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2a-b}{b\sqrt{3}} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2b-a}{a\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}.$$

$$44. 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\operatorname{tg} \frac{A}{2} \sqrt{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - B \right)} \right] = \operatorname{arc} \cos \frac{\cos A + \operatorname{tg} B}{1 + \cos A \operatorname{tg} B}.$$

$$45. \operatorname{arc} \operatorname{tg} [\sqrt{2} + 1] \operatorname{tg} a - \operatorname{arc} \operatorname{tg} [(\sqrt{2} - 1) \operatorname{tg} a] = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sin 2a.$$

$$46. \operatorname{tg} (2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} a) = 2 \operatorname{tg} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} a + \operatorname{arc} \operatorname{tg} a^2).$$

$$47. \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\frac{1}{3} \operatorname{tg} 2A) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{ctg} A) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{ctg}^3 A) = 0.$$

$$48. \text{Если } A = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{7} \text{ и } B = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3}, \text{ то } \cos 2A = \sin 4B.$$

$$49. \text{Показать, что } \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x \cos \vartheta}{1 - x \sin \vartheta} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x - \sin \vartheta}{\cos \vartheta} = \vartheta.$$

$$50. \text{Показать, что } 2 \operatorname{tg} \left(\operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \right) = \operatorname{arc} \cos \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = a - \frac{1}{a}.$$

$$51. \text{Показать, что } \frac{2b}{a} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \cos \frac{a}{b} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arc} \cos \frac{a}{b} \right).$$

52. Показать, что

$$\frac{a^3}{2} \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{a}{b} \right) + \frac{b^3}{2} \sec^2 \left(\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a} \right) = (a+b)(a^2 + b^2).$$

Рѣшить уравненія (отъ 53 до 66) относительно x :

$$53. \operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \sin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$54. \operatorname{arc} \cos x + \operatorname{arc} \cos (1-x) = \operatorname{arc} \cos (-x).$$

$$55. \operatorname{arc} \sin \frac{2a}{1+a^2} + \operatorname{arc} \sin \frac{2b}{1+b^2} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$$

$$56. \operatorname{arc} \cos x + \operatorname{arc} \cos (1-x) = \operatorname{arc} \cos \sqrt{x-x^2}.$$

$$57. \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x-1} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x+1} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} a.$$

$$58. \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sec 5x = 45^\circ.$$

$$59. \operatorname{arc} \cos \frac{1-x^2}{1+x^2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x}{1-x^2} = 240^\circ. \quad 60. \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 5x.$$

$$61. \operatorname{arc} \operatorname{tg} (x-1) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} (x+1) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3x.$$

$$62. \operatorname{arc} \sin 2x = \operatorname{arc} \sin x\sqrt{3} = \operatorname{arc} \sin x.$$

$$63. \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{4} + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{6} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{4}.$$

$$64. \sin [2 \arccos \{ \cos \operatorname{ctg} (2 \arccos \operatorname{tg} x) \}] = 0.$$

$$65. \arccos \operatorname{tg} \frac{1}{a-1} = \arccos \operatorname{tg} \frac{1}{x} + \arccos \operatorname{tg} \frac{1}{a^2-x+1}.$$

$$66. \text{Если } \sin(\pi \cos \vartheta) = \cos(\pi \sin \vartheta), \text{ то } \vartheta = \pm \frac{1}{2} \arccos \sin \frac{3}{4}.$$

67. Найти цѣлыя рѣшенія для x и y изъ уравненія:

$$\arccos \operatorname{tg} x + \arccos \operatorname{tg} \frac{1}{y} = \arccos \operatorname{tg} 3.$$

Найти:

$$68. \arccos \operatorname{tg} 3 + \arccos \operatorname{tg} 7 + \dots + \arccos \operatorname{tg} (1+n+n^2).$$

69. Определить сумму n членовъ ряда:

$$\arccos \operatorname{tg} \frac{1}{1+1+1^2} + \arccos \operatorname{tg} \frac{1}{1+2+2^2} + \arccos \operatorname{tg} \frac{1}{1+3+3^2} + \dots$$

70. Определить сумму n членовъ ряда:

$$\arccos \operatorname{tg} x + \arccos \operatorname{tg} \frac{x}{1+1.2x^2} + \arccos \operatorname{tg} \frac{x}{1+2.3x^2} + \dots$$

РЪШЕНИЕ ЗАДАЧЪ.

Отвѣты на предложенные вопросы.

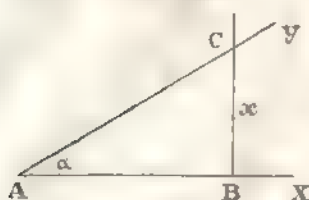
Введеніе. 1. $3437',75$ съ точн. до $0',01$. 2. $206264'',81$ съ точн. до $0'',01$.
 3. $\frac{1}{8}\pi$ и $\frac{3}{4}\pi$. 4. $105^\circ; 266^\circ 24'; 797^\circ 8' 34'', 286$. 5. $0,6457718$. 6. $4,7123890$.
 7. $0,0123918$. 8. $0,6161012\sqrt{17}$. 9. $0,0001119$. 10. $0,0944708$. 11. $3,4362964$.
 12. $0,8553963$. 13. $3,7021492$. 14. $1,5066979$. 15. $6,0801047$. 16. $9,0203740$.
 17. $12^\circ 19'$. 18. $146^\circ 30''$. 19. $0'',908$. 20. $2' 8'',02$. 21. $57' 55'',58$.
 22. $1^\circ 39' 0'',47$. 23. $6^\circ 52'',85$. 24. $71^\circ 21' 19'',95$. 25. $113^\circ 49' 14'',02$.
 26. $142^\circ 5' 36'',74$. 27. $154^\circ 41' 55''$. 28. $172^\circ 48' 14'',66$. 29. $202^\circ 51' 59'',12$.
 30. $220^\circ 11' 19'',85$. 31. $286^\circ 25' 44'',02$. 32. $550^\circ 2' 22'',12$.

Отдѣлъ I. 1. $\sin(-90^\circ) = -1$; $\cos(-90^\circ) = 0$; $\sin(-180^\circ) = 0$;
 $\cos(-180^\circ) = -1$; $\sin(-270^\circ) = 1$, $\cos(-270^\circ) = 0$; $\sin(-360^\circ) = 0$;
 $\cos(-360^\circ) = 1, \dots$ 2. 1. 3. -1 . 4. ∞ . 5. -1 . 6. 1. 7. 2. 8. 0.

9. $\frac{1}{2}$. 10. $-\sqrt{\frac{1}{3}}$. 11. $=1$. 12. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. 13. 1. 14. $a+b$. 15. 7.
 16. -19 . 17. 32. 18. $-5\frac{1}{3}$. 19. $(a+b)^2$. 20. $-n$. 21. $-4,6$. 22. 0.

28. ∞ . 24. 0. 25. $(m-n)^2$. 26. $a^2 - b^2$. 27. 7. 28. $\sqrt[3]{2}$. 29. $2\sqrt{2}$.

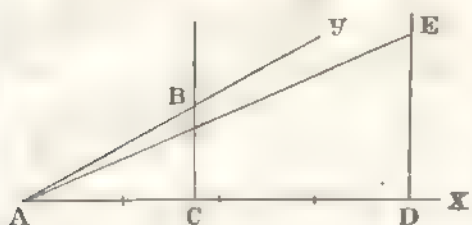
Фиг. 100.



31. Для приѣбра построимъ $ktg\alpha$. Означимъ эту длину буквою x ; тогда $ktg\alpha = x$ или $tg\alpha = \frac{x}{k}$. Но тангенсъ угла есть отношеніе перпенд. къ проекціи наклонной, а потому строимъ уголъ $XAY = \alpha$ и, отложивъ часть $AB = a$, возставаемъ изъ точки B перпенд. къ AX , кот. пересѣчетъ прямую AU въ точкѣ C . Тогда $BC = x$.

32. Для приѣбра рѣшимъ задачу d) $ctg\alpha = 4tg\alpha$. Чертимъ уголъ $XAY = \alpha$ и изъ какой либо точки B , взятой на AU , опустимъ перпенд. BC на

Фиг. 101.



AX ; тогда $tg\alpha = \frac{BC}{AC}$, а $ctg\alpha =$

$$= 4tg\alpha = \frac{4BC}{AC}$$

По сtg угла есть отношеніе проекціи наклонной къ перпенд., а потому на прямой AX откладываемъ часть $AD = 4BC$ и изъ точки D возставаемъ перпенд. къ прямой AX , на кот. откладываемъ

часть $DE = AC$. Уголъ EAX будетъ искомымъ. 33. 0,6. 34. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

35. 0,75. 36. 0,6. 37. $c = 20$; $b = \sqrt{204}$. 38. $a = 10$; $b = 10\sqrt{15}$.

39. $c = 2\sqrt{15}$; $b = 2\sqrt{6}$. 40. $c = 27$, $b = 3\sqrt{17}$. 41. $b = 2$; $c = 2\sqrt{37}$.

42. $b = 1,2$; $c = \sqrt{2,08}$. 43. $a = 2$, $c = 2\sqrt{5}$. 44. $a = 9$; $b = 12$.

45. $a = 18$; $c = 9\sqrt{5}$. 46. $b = 0,8$; $c = 1$.

№	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$tg \alpha$	$ctg \alpha$	$\sec \alpha$	$\operatorname{cosec} \alpha$
47.		$\pm 0,6$	$\pm 1 \frac{1}{3}$	$\pm 0,75$	$\pm 1 \frac{2}{3}$	$\pm 1,25$
48.	$\pm \sqrt{\frac{8}{9}}$		$\pm \sqrt{8}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{8}}$	± 3	$\pm \sqrt{\frac{9}{8}}$
49.	$\pm \sqrt{\frac{25}{41}}$	$\pm \sqrt{\frac{16}{41}}$		0,8	$\pm \sqrt{\frac{41}{16}}$	$\pm \sqrt{\frac{41}{25}}$
50.	$\pm \sqrt{\frac{1}{3}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{3}}$	$\pm \sqrt{2}$	$\pm \sqrt{0,5}$		$\pm \sqrt{1,5}$
51.	$\frac{1}{4}$	$\pm \sqrt{\frac{15}{16}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{15}}$	$\pm \sqrt{15}$	$\pm \sqrt{\frac{16}{15}}$	

№	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sec \alpha$	$\operatorname{cosec} \alpha$
52.		$\sqrt{0,84}$	$\sqrt{\frac{3}{21}}$	$\sqrt{\frac{21}{3}}$	$\sqrt{\frac{25}{21}}$	2,5.
53.		$-\sqrt{\frac{11}{36}}$	$-\sqrt{\frac{25}{11}}$	$-\sqrt{\frac{11}{25}}$	$-\sqrt{\frac{36}{11}}$	1,2
54.		$-\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{\frac{4}{3}}$	-2.
55.		$\sqrt{0,8}$	-0,5	-2	$\sqrt{1,25}$	$-\sqrt{5}$.
56.	$\sqrt{\frac{35}{36}}$		$\sqrt{35}$	$\sqrt{\frac{1}{35}}$	6	$\sqrt{\frac{36}{35}}$.
57.	$\sqrt{\frac{4}{7}}$		$-\sqrt{\frac{4}{3}}$	$-\sqrt{\frac{3}{4}}$	$-\sqrt{\frac{7}{3}}$	$\sqrt{\frac{7}{4}}$.
58.	-0,8		$1\frac{1}{3}$	0,75	$-1\frac{2}{3}$	-1,25.
59.	$-\sqrt{0,19}$		$-\sqrt{\frac{19}{81}}$	$-\sqrt{\frac{81}{19}}$	$-1\frac{1}{9}$	$-\sqrt{\frac{100}{19}}$.
60.	$\sqrt{0,8}$	$\sqrt{0,2}$		0,5	$\sqrt{5}$	$\sqrt{1,25}$.
61.	$\sqrt{\frac{49}{50}}$	$-\sqrt{\frac{1}{50}}$		$-\frac{1}{7}$	$-\sqrt{50}$	$\sqrt{\frac{50}{49}}$.
62.	-0,8	-0,6		0,75	$-1\frac{2}{3}$	-1,25.
63.	-0,6	0,8		$-1\frac{1}{3}$	1,25	$-1\frac{2}{3}$.
64.	$\sqrt{0,9}$	$\sqrt{0,1}$	3		$\sqrt{10}$	$\sqrt{\frac{10}{9}}$.
65.	0,5	$-\sqrt{0,75}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$		$-\sqrt{\frac{4}{3}}$	2.
66.	$-\sqrt{\frac{25}{89}}$	$-\sqrt{\frac{64}{89}}$	$\frac{5}{8}$		$-\sqrt{\frac{89}{64}}$	$-\sqrt{\frac{89}{25}}$.
67.	$-\sqrt{0,8}$	$\sqrt{0,2}$	-2		$\sqrt{5}$	$-\sqrt{1,25}$.
68.	$\sqrt{\frac{8}{9}}$	$\frac{1}{3}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{\frac{1}{8}}$		$\sqrt{\frac{9}{8}}$.
69.	$\sqrt{0,96}$	-0,2	$-\sqrt{24}$	$-\sqrt{\frac{1}{24}}$		$\sqrt{\frac{25}{24}}$.
70.	$-\sqrt{\frac{24}{49}}$	$-\frac{5}{7}$	$\sqrt{\frac{24}{25}}$	$\sqrt{\frac{25}{24}}$		$-\sqrt{\frac{49}{24}}$.

№	sin α	cos α	tg α	ctg α	sec α	cosec α
71.	0,8	0,6	$-1\frac{1}{3}$	0,75		-1,25.
72.	0,75	$\sqrt{\frac{7}{16}}$	$\sqrt{\frac{9}{7}}$	$\sqrt{\frac{7}{9}}$	$\sqrt{\frac{16}{7}}$	
73.	0,4	$-\sqrt{0,84}$	$-\sqrt{\frac{4}{21}}$	$-\sqrt{\frac{21}{4}}$	$-\sqrt{\frac{25}{21}}$	
74.	$-\frac{1}{6}$	$-\sqrt{\frac{63}{64}}$	$\sqrt{\frac{1}{63}}$	1,63	$-\sqrt{\frac{64}{63}}$	
75.	$\frac{1}{3}$	$\sqrt{\frac{8}{9}}$	$\sqrt{\frac{1}{8}}$	$-\sqrt{8}$	$\sqrt{\frac{9}{8}}$	

76. $\sin(-\alpha) = 0,3$; $\cos(-\alpha) = -\sqrt{0,91}$; $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\sqrt{\frac{9}{91}}$; $\operatorname{ctg}(-\alpha) = \sqrt{\frac{91}{9}}$;
 $\sec(-\alpha) = -\sqrt{\frac{100}{91}}$; $\operatorname{cosec}(-\alpha) = \frac{10}{3}$. 77. $\sin(-\alpha) = -\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\cos(-\alpha) = -\sqrt{\frac{1}{3}}$;
 $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\sqrt{2}$; $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sec(-\alpha) = -\sqrt{3}$; $\operatorname{cosec}(-\alpha) = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

78. $\sin(-\alpha) = \sqrt{\frac{8}{9}}$; $\cos(-\alpha) = \frac{1}{3}$; $\operatorname{tg}(-\alpha) = \sqrt{8}$; $\operatorname{ctg}(-\alpha) = \sqrt{\frac{1}{8}}$;
 $\sec(-\alpha) = 3$; $\operatorname{cosec}(-\alpha) = \sqrt{\frac{9}{8}}$. 79. $\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\sqrt{5}$;
 $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{4}{5}}$; $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$. 80. $\operatorname{tg}(\alpha) = -\sqrt{8}$; $\sin(-\alpha) = \sqrt{\frac{8}{9}}$.

81. $\sec(-\alpha) = -\sqrt{\frac{16}{15}}$; $\operatorname{ctg}(-\alpha) = \sqrt{15}$; $\sin(-\alpha) = -0,25$.

82. $\frac{b^2 - a^2}{ab}$ 83. $\frac{m}{n} \sqrt{\frac{m}{m+n}}$ 84. $\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$ 105. $\sin x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$.

106. $\operatorname{tg} x = +\sqrt{b}$ 107. $\operatorname{tg} x = +\sqrt{a}$ 108. $\cos x = -1$ и $\operatorname{tg} x = \frac{b}{a}$.

109. $\sin x = 0$ и $\cos x = \frac{b-a}{b+a}$ 110. $\cos x = 1$ и $\cos x = \frac{a-b}{b}$.

111. $\operatorname{tg} x = \frac{a^3 - 1}{2a}$ 112. $\operatorname{tg} x = 1$ и 5. 113. $\sin x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2b}$.

114. $\cos x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a^2}}{\pm a}$ 115. $\sin x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}n + \sqrt{\frac{1}{3}}$.

116. $\sin x = \sqrt{0,5}$ 117. $\operatorname{tg} x = +\frac{b}{a}$ 118. $\operatorname{tg} x = \pm \frac{1}{2}$ и $\pm \sqrt{\frac{3}{4}}$.

119. $\sin x = \pm \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2 - 1}}$, $\sin y = \pm \frac{1}{a} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2 - 1}}$ 120. $\operatorname{tg} x = +\sqrt{0,8}$.

121. $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3} + \frac{2}{9}$ 125. 0,5. 126. 2. 127. 2. 128. 0,5. 129. $\sqrt{2}$. 130. -1

Отдѣлъ II. 1. a) $\sin 20^\circ$; b) $-\sin 52^\circ 17'$; c) $\sin 42^\circ 59' 31''$; d) $\sin 53^\circ$;
 e) $-\sin 54^\circ$; f) $\sin 71^\circ 34'$; g) $\sin 18^\circ 6' 18''$; h) $\sin 10^\circ$. 2. a) $\cos 6^\circ 47' 55''$;
 b) $-\cos 67^\circ$; c) $-\cos 72^\circ 56'$; d) $\cos 10^\circ$; e) $-\cos 14^\circ 59' 36''$; f) $-\cos 38^\circ$;
 g) $\cos 51^\circ$; h) $-\cos 53^\circ$. 3. a) $\operatorname{tg} 73^\circ 18'$; b) $\operatorname{tg} 20^\circ$; c) $\operatorname{tg} 52^\circ$; d) $-\operatorname{tg} 44^\circ$;
 e) $-\operatorname{tg} 35^\circ 25''$; f) $\operatorname{tg} 22^\circ 59' 52''$; g) $-\operatorname{tg} 5^\circ$; h) $\operatorname{tg} 35^\circ$. 4. a) $-\operatorname{ctg} 2^\circ 25' 46''$;

b) $\text{ctg } 75^{\circ}34'$; c) $\text{ctg } 78^{\circ}$; d) $\text{ctg } 25^{\circ}$; e) $\text{ctg } 7^{\circ}4'36''$; f) $\text{ctg } 20^{\circ}$;
 g) $\text{ctg } 2^{\circ}$; h) $\text{ctg } 20^{\circ}$ 5. a) $\text{sec } 24^{\circ}19''$; b) $\text{sec } 50^{\circ}$; c) $\text{sec } 62^{\circ}$;
 d) $\text{sec } 54^{\circ}34'$. 6. a) $\text{csc } 52^{\circ}24'$; b) $\text{csc } 18^{\circ}$; c) $\text{csc } 82^{\circ}$; d) $\text{csc } 40^{\circ}$.

№	sin	cos	tg	ctg	sec	coscc
7.	$-0,8$	$0,6$	$0,75$	$-0,75$	$-1,25$	$-1\frac{2}{3}$
8.	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\sqrt{\frac{1}{8}}$	$-\sqrt{\frac{1}{8}}$	$-\sqrt{\frac{9}{8}}$	-3
9.	$-\frac{2}{3}$	$\sqrt{\frac{5}{9}}$	$\sqrt{\frac{5}{4}}$	$\sqrt{\frac{5}{4}}$	$1,5$	$1,5$
10.	$\sqrt{0,84}$	$\sqrt{0,84}$	$\sqrt{\frac{4}{21}}$	$-\sqrt{\frac{4}{21}}$	$-2,5$	$2,5$
11.	$-0,6$	$-0,8$	$1\frac{1}{3}$	$-0,75$	$-1,25$	$-1,25$
12.	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{4}{9}\sqrt{5}$	$\sqrt{40}$	$-\sqrt{\frac{1}{80}}$	9	9
13.	$\sqrt{0,75}$	$-0,5$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{3}$	2	$-\sqrt{\frac{4}{3}}$
14.	$\sqrt{0,84}$	$-0,4$	$-\sqrt{\frac{4}{21}}$	$-\sqrt{\frac{21}{4}}$	$2,5$	$-\sqrt{\frac{5}{21}}$
15.	$\sqrt{0,9}$	$-\sqrt{0,9}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\sqrt{\frac{10}{9}}$	$-\sqrt{10}$
16.	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\sqrt{\frac{1}{8}}$	$\sqrt{8}$	$-\sqrt{\frac{9}{8}}$	-3
17.	$\sqrt{0,2}$	$\sqrt{0,2}$	$-0,5$	-2	$-\sqrt{\frac{5}{4}}$	$\sqrt{5}$
18.	$-\sqrt{\frac{4}{13}}$	$\sqrt{\frac{4}{13}}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\sqrt{\frac{13}{4}}$	$-\sqrt{\frac{13}{4}}$
19.	$0,8$	$0,8$	$1\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$, $0,75$	$-1\frac{2}{3}$	$1\frac{2}{3}$
20.	$-\sqrt{\frac{25}{26}}$	$-\sqrt{\frac{1}{26}}$	$-0,2$	5	$\sqrt{\frac{26}{25}}$	$\sqrt{26}$
21.	$0,2$	$0,2$	$-\sqrt{\frac{1}{24}}$	$-\sqrt{\frac{1}{24}}$	5	$-\sqrt{\frac{25}{24}}$
22.	$-\sqrt{\frac{16}{41}}$	$\sqrt{\frac{16}{41}}$	$-0,8$	$-0,8$	$\sqrt{\frac{41}{25}}$	$-\sqrt{\frac{41}{25}}$
23.	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{0,5}$	$\sqrt{0,5}$	$\sqrt{1,5}$	$\sqrt{3}$
24.	$-0,8$	$-0,8$	$1\frac{1}{3}$	$-1\frac{1}{3}$	$1,25$	$-1,25$

25. $-\sqrt{\frac{1}{2}}$. 26. $\sqrt{\frac{3}{4}}$. 27. $-\sqrt{\frac{1}{3}}$. 28. -1 . 29. $-\sqrt{\frac{1}{8}}$. 30. $-\sqrt{\frac{5}{4}}$.
 31. $-\sqrt{\frac{4}{3}}$. 32. $-\frac{1}{3}$. 33. 1 . $\sqrt{\frac{1}{2}}$. 34. $-\sqrt{\frac{3}{4}}$. 35. $-\frac{1}{2}$. 36. 1 .
 37. $-\frac{1}{2}$. 38. -1 . 39. $\sqrt{3}$. 40. $-\sqrt{\frac{1}{3}}$. 41. $1 + \sqrt{\frac{1}{4}}$. 42. $-\frac{1}{2}$.
 43. $= 3\sqrt{\frac{1}{2}}$. 44. $= \sqrt{3}$. 45. $= 2\sqrt{2}$. 46. $= 2\sqrt{2}$. 47. 0 . 48. $\sqrt{3}$.
 49. $3(7 - 4\sqrt{3})$. 50. $\frac{1}{2}(3\sqrt{3} - 1)$. 51. $-\sqrt{\frac{1}{3}}$. 52. $4\frac{21}{26}$. 53. $0,5$.
 54. $0,48$. 55. $\pm\frac{4}{9}$. 56. $0, \pm 1$ и $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. 57. 0 и ± 1 . 58. $\pm\sqrt{\frac{3}{4}}$ и $\frac{1}{2}$.
 59. 0 и $\pm\sqrt{3}$. 60. $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\pm\infty$. 61. $+\infty, \pm\sqrt{2}$ и 1 . 62. n .
 63. $-\sin \alpha$. 64. $\operatorname{ctg}^2 \alpha$. 65. 0 . 66. 0 . 67. а) $183^{\circ}24'$, б) $221^{\circ}33'13''$;
 в) 160° ; д) $225^{\circ}15'$; е) $107^{\circ}41'25''$, ф) $105^{\circ}44'$, г) 124° , h) $120^{\circ}6'$.
 68. $45^{\circ}, 225^{\circ}, 105^{\circ}, 585^{\circ}, 765^{\circ}$ и 945° . 69. $300^{\circ}, 120^{\circ}, 660^{\circ}$ и 780° .
 70. -240° и -300° . 71. $-120^{\circ}, -300^{\circ}, -480^{\circ}$ и -600° .
 72. $x = (2n + \frac{1}{2})\pi$. 73. $x = 2n\pi$. 74. $x = (n + \frac{1}{4})\pi$. 75. Невозможно.
 76. $x = (2n + \frac{2}{3})\pi$. 77. $x = (n + \frac{1}{5})\pi$. 78. $x = (n + \frac{1}{4})\pi$.
 79. $x = (n \pm \frac{1}{4})\pi$. 80. $x = (n \pm \frac{1}{3})\pi$. 81. $x = (n + \frac{9}{4})\pi$.
 82. $x = (n + \frac{1}{4})\pi$. 83. $x = n\pi + \alpha$. 84. $x = n\pi \pm \alpha$.
 85. $x = (n + \frac{1}{2})\pi + \alpha$. 86. $x = n\pi \pm \alpha$. 87. $x = (2n + \frac{7}{4})\pi$.
 88. $x = (2n + \frac{7}{6})\pi$. 89. Нѣтъ. 90. $x = (n + \frac{2}{3})\pi$. 91. $x = (4n + 1)\frac{\pi}{6}$.
 92. $x = (2n + 1)\frac{\pi}{3}$. 93. $x = \frac{2}{5}n\pi$ и $\frac{1}{3}(2n + 1)\pi$.
 94. $x = n\pi$ и $(2n \pm \frac{1}{2})\pi$. 95. $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ и $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$.
 96. $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$. 97. $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$. 98. $x = (2n + \frac{1}{4})\pi$.
 99. $x = 2n \cdot 180^{\circ} + 45^{\circ}$ и $y = 15^{\circ}$. 100. $x = 2n\pi$ и $n\pi \pm (-1)^n \frac{\pi}{4}$ и
 $y = 2n\pi$ и $n\pi \pm (-1)^n \frac{\pi}{6}$. 101. $x = n\pi \pm (-1)^n \frac{\pi}{3}$.

Отдѣлъ III. 1. $0,4\sqrt{3} - 0,3$. 2. $\sqrt{0,2} + \sqrt{0,15}$. 3. $-0,5$.

4. $-\sqrt{\frac{4}{13}}$. 5. $4\sqrt{5} - 9$. 6. $(25 + 8\sqrt{7}) : 3\sqrt{3}$. 7. $\sin(\alpha \pm \beta) =$
 $= 0,3\sqrt{3} \pm 0,4$; $\cos(\alpha \pm \beta) = 0,4\sqrt{3} \mp 0,3$; $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{48 \mp 25\sqrt{3}}{39}$;
 $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{48 \mp 25\sqrt{3}}{11}$; $\operatorname{sec}(\alpha \pm \beta) = \frac{10(41 \pm 3\sqrt{3})}{39}$, $\operatorname{cosec}(\alpha \pm \beta) =$

- $= \frac{10(3\sqrt{3} \mp 4)}{11}$. 8. $\sin(\alpha \pm \beta) = \frac{1}{9}(2 \pm \sqrt{10})$; $\cos(\alpha \pm \beta) = \frac{1}{9}(4\sqrt{2} \mp 5)$;
 $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{1}{3}(2 \pm 2\sqrt{5})$; $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = -\frac{3}{8}(1 \mp \sqrt{5})$; $\sec(\alpha \pm \beta) =$
 $= \frac{1}{9}(4\sqrt{2} \pm 5)$; $\operatorname{cosec}(\alpha \pm \beta) = \frac{3}{2}(2 \mp \sqrt{10})$. 9. $\sin(\alpha \pm \beta) =$
 $= 0,2\sqrt{2} + 0,4\sqrt{3}$; $\cos(\alpha + \beta) = 0,2\sqrt{3} \mp 0,4\sqrt{2}$; $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\sqrt{6} + 2$;
 $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{1}{2}(-\sqrt{6} \pm 2)$, $\sec(\alpha + \beta) = -\sqrt{3} \mp 8$, $\operatorname{cosec}(\alpha \pm \beta) =$
 $= \sqrt{0,5} \pm \sqrt{3}$. 10. $\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sin(\alpha - \beta) = \sqrt{\frac{1}{50}}$; $\cos(\alpha + \beta) =$
 $= -\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\cos(\alpha - \beta) = \sqrt{\frac{49}{50}}$, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -1$; $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{1}{7}$;
 $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = -1$; $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = 7$; $\sec(\alpha + \beta) = \sqrt{2}$, $\sec(\alpha - \beta) =$
 $= \sqrt{\frac{50}{49}}$; $\operatorname{cosec}(\alpha + \beta) = \sqrt{2}$; $\operatorname{cosec}(\alpha - \beta) = \sqrt{50}$. 11. $0,2 + \sqrt{0,63}$;
 $-\sqrt{0,21} - \sqrt{0,12}$, $\frac{1}{9}(8\sqrt{21} - 25\sqrt{3})$; $\frac{1}{50}(8\sqrt{21} - 25\sqrt{3})$.
 12. $\frac{1}{12}(\sqrt{35} = 6)$; $\frac{1}{12}(3\sqrt{5} = 2\sqrt{7})$; $-\frac{1}{17}(32\sqrt{5} + 27\sqrt{7})$; $-27\sqrt{7} - 32\sqrt{5}$.
 13. -1 ; $\frac{1}{7}$; $-\sqrt{\frac{49}{30}}$; $-\sqrt{\frac{1}{2}}$. 14. $-0,96$; $0,28$. 15. $\pm \frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}$;
 $\frac{4ab - (a-b)^2}{(a+b)^2}$. 16. $-2\sqrt{2}$. 17. $\frac{64}{16}$. 18. $\frac{5}{9}\sqrt{3}$. 19. $0,568$. 20. $\frac{65}{37}$; $-\frac{119}{120}$.
 21. $-0,96$; $0,936$. $\frac{24}{7}$, $\frac{117}{44}$; $-0,5376$. 22. $-\frac{1}{3}$; $-\sqrt{\frac{2}{27}}$; $\sqrt{0,08}$, $\sqrt{\frac{1}{8}}$; $-\frac{7}{9}$.
 23. $0,6$; $\sqrt{0,676}$; $-\frac{24}{7}$; $-\frac{4}{3}$; $-1,25$. 24. $\frac{13}{27}$; $-\frac{23}{30}\sqrt{2}$; $\frac{17}{112}\sqrt{2}$; $1\frac{3}{7}$.
 25. $\sin(\alpha + 2\beta) = \frac{7}{18} + \frac{2}{9}\sqrt{6}$; $\cos(2\alpha - \beta) = \frac{1}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}(2\alpha + 2\beta) =$
 $= -(81\sqrt{3} + 112\sqrt{2})$; 47 . 26. 45° . 27. $(1-p^2):2p$. 28. $n\pi$. 29. $\sqrt{\frac{8}{9}}$ и $\frac{1}{3}$.
 30. $-0,4$. 31. $\operatorname{tg} \alpha = -0,75$; $\sin \alpha = 0,6$; $\cos \alpha = -0,8$. 32. $\frac{3}{5}$ и $-\frac{4}{5}$.
 88. $x = n\pi$ и $2n\pi \pm \frac{1}{6}\pi$. 89. $x = 2n\pi \pm \frac{1}{2}\pi$ и $2n\pi \pm \frac{1}{3}\pi$.
 90. $x = n\pi$, $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ и $n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$. 91. $x = n\pi \pm \frac{1}{6}\pi$ и $n\pi$.
 92. $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$. 93. $x = n\pi$ и $\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{\frac{1}{7}}$.
 94. $\sin 2x = \frac{b}{1 + \sin 2x}$. 95. $\sin x = 1, -1$ и 0 . 96. $\sin 2x = \frac{a}{a+b}$.
 97. $\operatorname{tg} x = -1, \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{a}{2b-1}$. 98. $\sin 2x = 1$ и $\frac{b^2 - 4a^2}{b^2 + 4a^2}$. 99. $\cos 2x = 0$
 1 и $\frac{4a^2 - b^2}{4a^2 + b^2}$. 100. $\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{\frac{b-2a}{b+2a}}$. 101. $\operatorname{tg} x = 1$ и -2 .
 102. $\cos x = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 + 4c^2}}{2c}$. 103. $\cos x = \frac{n}{2m}$. 104. $\operatorname{ctg} x = b$.

105. $x = \frac{1}{2} n\pi$ и $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$. 106. $r = \frac{2}{3} n\pi, \frac{1}{4} \pi - n\pi$ и $2n\pi - \frac{1}{2} \pi$.
107. $\frac{1}{3} (2n\pi \pm \frac{1}{3} \pi)$ и $\frac{1}{4} (2n\pi \pm \frac{1}{2} \pi)$. 108. $x = \frac{1}{3} n\pi$ и $\frac{1}{4} (2n\pi \pm \frac{1}{4} \pi)$.
109. $2x = n\pi \pm \frac{1}{2} \pi$ и $2n\pi \mp \frac{2}{3} \pi$. 110. $r = \frac{2}{5} n\pi, n\pi + \frac{1}{2} \pi$ и $(2n \pm 1) \pi$.
111. $x = \frac{1}{2} n\pi$ и $2n\pi \pm \frac{2}{3} \pi$. 112. $x = n\pi + \frac{1}{2} \pi$. 113. $2x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$.
114. $x = n\pi - \frac{1}{4} \pi$ и $\frac{1}{2} n\pi - \frac{1}{9} \pi$. 115. $2x = (2n + 1) \pi$ и $2n\pi \pm \frac{1}{2} \pi$.
116. $x = n\pi \pm \frac{1}{10} \pi$ и $n\pi \pm \frac{3}{10} \pi$. 117. $4x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ и $x = n\pi + \frac{1}{2} \pi$.
118. $x = n\pi \pm \frac{1}{4} \pi$ и $n\pi \pm \frac{1}{6} \pi$. 119. $x = -\frac{1}{4} n\pi$ и $\frac{1}{8} n\pi$. 120. $x = n\pi$ и $n\pi + \frac{1}{8} \pi$. 121. $2x - \alpha = 2n\pi \pm \frac{1}{3} \pi$. 122. $x = 2n\pi + \frac{1}{4} \pi$. 123. $x = 2n\pi \pm \frac{1}{5} \pi$ и $2n\pi + \frac{3}{5} \pi$. 124. $x = n\pi$ и $n\pi + \frac{3}{4} \pi$. 125. Данное уравнение разлагается на три уравнения: $\sin x = -1, \sin \frac{1}{2} x = 0$ и $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = 2$.
126. $x = \frac{1}{4} (2n + 1) \pi$ и $7x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$. 127. $x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$.
128. 0 и $\pm \sqrt{2}$. 129. $\cos x \pm \frac{1}{2} = -1$.
130. $x = \frac{\pi}{16}$. 131. $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}$. 132. $\operatorname{tg} x = 2 \pm \sqrt{3}$.
133. $\sin x = \pm \frac{b \sin \alpha - a}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \sin \alpha}}$. 134. $\sin x = \pm \frac{m \sin \alpha}{\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \alpha}}$.
135. $x = a \cos(\alpha - \beta)$ и $-a \cos(\alpha + \beta)$.
136. $\cos(x + 1) a = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)$.
137. $\sin x = \pm \frac{a \sin \alpha - b \cos \beta}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \sin(\alpha + \beta)}}$.
138. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin \beta \sin(\gamma - \alpha)}{\sin \alpha \cos(\gamma + \alpha)}$, гдѣ $\operatorname{tg} \gamma = \frac{m}{n}$. 139. $\operatorname{tg}(\alpha - 2x) = \frac{n - m}{n + m} \operatorname{tg} \alpha$.
140. $\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{\frac{a - 2 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha (a \operatorname{tg} \alpha + 2)}}$. 141. $\operatorname{tg} x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} - 1}$.
142. $\operatorname{tg} x = \frac{1 + ab}{a + b} \pm \sqrt{\left(\frac{1 + ab}{a + b} \right)^2 + 1}$.
143. $\sin x = \pm \sqrt{\frac{ab + 1 \pm \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)}}{2}}$.
144. $\cos x = \pm \sqrt{\frac{ab + 1 \pm \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)}}{2}}$.
145. $x = \sec \left(x - \frac{\beta}{2} \right)$ и $x = \cos \frac{\beta}{2} \sec x$. 146. $\sin 2^i x = \sin 3x$.

147. $\cos x = \pm \sqrt{\frac{a - 2 \sin^2 \alpha}{2 \cos 2\alpha}}$. 148. $\cos r = 1$ и $\cos r = + \cos \alpha \pm \sqrt{2}$.
149. $\cos x = + \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma}{2 \sin \beta \sin \gamma}$. 150. $n = 2$.
151. Данное урав. можно представлять такъ: $\sin^3 x - \alpha \sin \frac{3x + \alpha}{2} = 0$;
откуда $x = (2n + 1)\pi + \alpha$ и $3x = (2n + 1)\pi + \alpha$.
153. $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,26}$; $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,76}$; $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{13}{38}}$;
154. $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{5}{7}}$; $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{2}{7}}$; $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{2,5}$.
155. $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{a + b}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$; $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{a - b}{a + b}$; $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{a + b}{a - b}$.
156. $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,9}$; $\cos \alpha = \sqrt{0,1}$; $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 3$.
157. $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{6}(\sqrt{15} - \sqrt{3})$; $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{6}(\sqrt{15} + \sqrt{3})$; $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 3)$.
158. $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{10 + \sqrt{2}}{20}}$; $\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{10 - \sqrt{2}}{20}}$; $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{10 + \sqrt{2}}{98}$.
159. $\cos \alpha = 0,68$; $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{338} : 17$.
160. $\operatorname{ctg} \alpha = \pm \frac{7}{4}$; $\sec \alpha = \pm \frac{5}{3}$. 161. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}$; $\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{26}}$; $\cos \alpha = \sqrt{\frac{25}{26}}$.
162. $\sin 7 \frac{10}{2} = \sqrt{(2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1) : 4} : 2$; $\cos 7 \frac{10}{2} = \sqrt{(2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1) : 4} \sqrt{2}$;
 $\operatorname{tg} 7 \frac{10}{2} = \sqrt{6 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2}$.
163. $\sin 67^{\circ}30' = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$; $\cos 67^{\circ}30' = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$; $\operatorname{tg} 67^{\circ}30' = \sqrt{2} - 1$.
164. Замѣтивъ, что $3^{\circ} - 30^{\circ} + 18^{\circ} = 45^{\circ}$, найдемъ:
 $\sin 3^{\circ} = \frac{1}{16}[(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - 1) - 2(\sqrt{3} - 1)\sqrt{5 + \sqrt{5}}]$.
167. $2 \sin \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha}$. 168. $(2n + \frac{3}{4})\pi$ и $(2n + \frac{5}{4})\pi$.
169. $(2n + \frac{5}{4})\pi$ и $(2n + \frac{7}{4})\pi$. 170. $(2n - \frac{1}{4})\pi$ и $(2n + \frac{1}{4})\pi$.
172. $\cos x = -1$ и $(b^2 - 2a^2) : 2a^2$. 173. $\frac{1}{2}x = n\pi$ и $(2n + \frac{1}{3})\pi$.
174. $\cos x = 1$ и $\sin x = \pm \frac{b}{a}$. 175. $x = (2n \pm \frac{1}{6})\pi$.
176. $x = \frac{1}{4}(2n + 1)\pi$. 177. $\operatorname{tg} x = \pm 1$. 178. $\sqrt{c - 1} : (c + 1)$.
200. $m^2 n^2 m^2 + n^2 + 3 = 1$. 201. $n + 2m = m^2 n$. 202. $m^2 + 2m = n^2$.
203. $n^2(m^2 - 1)^2 + 1 - n^2(m^2 - 1)^2$. 204. $3m = m^3 + 2n$.
205. $a^2 x^2 + b^2 y^2 = a^2 b^2$. 206. $b^2 = a^2 - 2ac \cos \frac{\gamma}{2} + c^2$. 209. $a^2 = b^2$.
210. $a^2 + b^2 - 2c = 2$. 211. $ab \operatorname{ctg} \alpha = b - a$. 212. $b^2(x^2 + y^2) = a^2(b^2 + y^2)$.
213. $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$. 214. $\operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \gamma$.

Отдѣлъ IV. 1. $\frac{1}{2}$. 2. $\frac{m}{n}$. 3. $\frac{m}{n}$. 4. -2. 5. $\frac{1}{2}$. 6. 1. 7. 8. 8. $\cos \alpha$.

9. $-\sin \alpha$. 10. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$. 11. $(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)$. 12. $\frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$. 13. $-\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$.

14. $\frac{2}{\pi}$. 15. $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Отдѣлъ VI. 1. 9,4763079. 2. 9,9671982. 3. 9,8289764. 4. 9,9123589.
 5. 9,1603202. 6. 9,9498530. 7. 9,4224097. 8. 9,8784015. 9. 9,6714807.
 10. 9,9015527. 11. 9,3369460. 12. 9,9863824. 13. 0,4419771. 14. 9,8920176.
 15. 7,7755554. 16. 9,6280626. 17. 9,7740711. 18. 0,4009928. 19. 9,3629407.
 20. 1,5913128. 21. 0,7077328. 22. 0,1034611. 23. 9,4188304. 24. 9,9374949.
 25. 8,5631993. 26. 9,5517824. 27. 0,7289352. 28. 0,9170086.
 29. 24°26'57",93. 30. 49°47'14",61. 31. 64°28",16. 32. 19°40',51.
 33. 5°44'21",01. 34. 16°37'12",58. 35. 58°22",82. 36. 76°54'45",67.
 37. 35°54'31",45. 38. 45°17",54. 39. 30°25'36",97. 40. 57°15'45",79.
 41. 44°59'28",03. 42. 38°44'48",14. 43. 29°3'40",01. 44. 31°13'17",1.
 45. 49°33'59",74. 46. 16°14'26",02. 47. 78°25'4",02. 48. 21°10',29.
 49. 9°31'38",86. 50. 5°44'16",32. 51. 8,8742655. 52. 8,4465607.
 53. 7,9364253. 54. 8,5785665. 55. 8,8426586. 56. 8,5234507.
 57. 8,8993709. 58. 7,6398561. 59. 8,1012723. 60. 8,7175310.
 61. 4°17'36". 62. 1°36'8",096. 63. 2°48",29. 64. 87°49'42". 65. 88°58'10",14.
 66. 89°40'59",706. 67. 1°54'42". 68. 15'0",0746. 69. 89°16'35",8.
 70. 86°30'30",061. 71. 8,4109485. 72. 8,0632807. 73. 6,4041413.
 74. 8,1207056. 75. 8,5410568. 76. 8,5446953. 77. 8,0492907. 78. 6,2952611.
 79. 8,5798508. 80. 8,5235428. 81. 1°28'34". 82. 15'8",0925. 83. 89°14'36",4.
 84. 89°59'19",676. 85. 1°49'48",7. 86. 40",7086. 87. 88°5'16",54.
 88. 89°27" 08. 89. 0,6668071. 90. 0,9816720. 91. 0,5158731. 92. 0,8864641.
 93. 0,4760416. 94. 7,128021. 95. 3,113122. 96. 0,07100617. 97. 1,9416108.
 98. 1,1033363. 99. 0,5333554. 100. $-0,8480465$. 101. $-1,0956244$.
 102. $-0,3797518$. 103. $-0,9834953$. 104. $-0,1909954$. 105. 0,4631388.
 106. 1,035523. 107. 46°33'7",55. 108. 27°49'54",34. 109. Нѣтъ.
 110. 51°41'1",91. 111. 60°56'26",57. 112. 79°54'38",22. 113. 84°42'6",11.
 114. 39°22'7",72. 115. 49°8",458. 116. 87°26'46",68. 117. 34°56'52",81.
 118. 19°28'16",4. 119. 215°5'58",66. 120. 108°36'41",26. 121. 120°27'56",97.
 122. 164°21'27" 92. 123. 123°44'56",35. 124. 185°44'21",01.
 125. 208°2'3",48 в 331°57'56",22. 126. 72°10'27",45 и 287°49'32",55.
 127. 101°18'35",76 и 281°18'35",76. 128. 54°7'4",89 и 234°7'4",89.
 129. 109°28'16",22 и 250°31'43",78. 130. 13°17'25",1 и 166°42'34",9.
 131. 404°25'37",21 и 495°34'22",79. 132. 204°13'0",42 и 515°46'59",58.
 133. 243°56'7",2 и 423°56'7",2. 134. 344°17'21",87 и 534°17'21",87.
 135. 277°17" 01 и 442°59'42",99. 136. 194°28'40",96 и 345°31'19",04.
 137. 25,42778. 138. 0,06677368. 139. 0,3369526. 140. 0,06103941.
 141. 1,0564895. 142. 0,35479926. 143. 0,2700887. 144. 0,9317088.
 145. 0,9101626. 146. 0,1411534. 147. 0,9971351. 148. $-0,9580007$.
 149. 0,024979. 150. 2,692428. 151. 1,08779. 152. 0,8843689. 153. 1,2191546.

154. 0,1488225.	155. 0,8583525.	156. 0,826141.	157. 0,2088575.
158. 5,325811.	159. 2,059528.	160. 0,8066363.	161. 0,2734893.
162. 0,002545031.	163. 0,5616135.	164. 0,282442.	165. 0,3744928.
166. 0,4082916.	167. 0,1798375.	168. 0,2657028.	169. 1,035244.
170. 0,07267254.	171. 0,2298819.	172. 3,247426.	173. 0,1667924.
174. 0,06383906.	175. $71^{\circ}4'39''$,78.	176. $12^{\circ}48'49''$,98.	177. $54^{\circ}32'11''$,77.
178. $161^{\circ}46'14''$ 08.	179. $2^{\circ}57'34''$,57.	180. $71^{\circ}2'0''$,72.	181. $205^{\circ}20'49''$,8.
182. $135^{\circ}34'7''$,17.	183. $85^{\circ}57'29''$,13.	184. $81^{\circ}22'43''$,67.	185. $44^{\circ}30'24''$,25.
186. $36^{\circ}51'25''$,13.	187. $46^{\circ}25'53''$,78.	188. $78^{\circ}59'48''$,78.	189. $42^{\circ}2'29''$,27.
190. $12^{\circ}34'39''$,36.	191. $45^{\circ}56'29''$,74.	192. $50^{\circ}28'10''$,92.	193. $26^{\circ}29'16''$,79.
194. $62^{\circ}3'26''$,94.	195. $35^{\circ}30'0''$,38.	196. $22^{\circ}20'7''$,15.	197. $57^{\circ}30'44''$,65.
198. $61^{\circ}48'3''$,24.	199. $11^{\circ}46'9''$,07.	200. $86^{\circ}46'56''$,27.	201. $34^{\circ}7'18''$,32.
202. $57^{\circ}25'40''$,75.	203. $18^{\circ}37'55''$,68.	204. $43^{\circ}10'0''$,31.	205. $33^{\circ}21'1''$,70.
206. $29^{\circ}15'$.	207. $13^{\circ}31'30''$,59.	208. $74^{\circ}15'36''$,12.	209. $32^{\circ}31'20''$,52.
210. $72^{\circ}54'55''$,8.	211. 0,5495554.	212. 3,084766.	213. 0,5624631.
214. 0,9122212.	215. 0,8402857.	216. 0,9952418.	217. 0,9799175.
218. 0,9993788.	219. 0,9125555.	220. $2\pi + 54^{\circ}11'58''$,73.	
221. $\pi + 88^{\circ}14'32''$,43.	222. $\pi + (-1)^n \cdot 41^{\circ}55'43''$,53.	223. 9,66706.	
224. 9,88611.	225. 9,72436.	226. 9,68951.	227. 9,97932.
229. 9,74751.	230. 8,66597.	231. 9,93704.	232. 0,90374.
234. 8,53676.	235. 1,01691.	236. 0,31173.	237. 9,93762.
239. 0,11762.	240. 0,06241.	241. 9,41883.	242. 9,97360.
244. 9,80962.	245. 9,39939.	246. 0,47037.	247. $41^{\circ}36''$.
249. $66^{\circ}54'50''$.	250. $22^{\circ}48'20''$.	251. $87^{\circ}34''$.	252. $59^{\circ}33'0''$.
254. $45^{\circ}13'40''$.	255. $29^{\circ}57'48''$.	256. $99^{\circ}47'22''$.	257. $36^{\circ}15'29''$.
259. $66^{\circ}16'33''$.	260. Невозм.	261. $49^{\circ}7'38''$.	262. 8,41095.
264. 6,37024.	265. 8,54397.	266. 7,82081.	267. 8,01744.
269. 6,06958.	270. 8,61406.	271. $49^{\circ}37''$,64.	272. $1^{\circ}21'31''$,8.
274. $88^{\circ}2'30''$ 3.	275. $81^{\circ}26'58''$,5.	276. $2^{\circ}13'8''$,8.	277. $17^{\circ}37''$,8.
279. $88^{\circ}17'38''$,1.	280. 0,86906.	281. 0,52461.	282. 0,66629.
284. 0,069089.	285. 1,7212.	286. 0,19140.	287. 6,8875.
289. 1,0151.	290. 0,5333.	291. — 0,8557.	292. — 0,14707.
294. — 2,1435.	295. — 0,19476.	296. 0,17521.	297. — 0,9835.
299. 0,46317.	300. 0,80964.	301. $40^{\circ}53'10''$.	302. $2^{\circ}59'37''$.
304. $51^{\circ}55'$.	305. $67^{\circ}48'13''$.	306. $84^{\circ}58'48''$.	307. $42^{\circ}4'51''$.
309. $49'7''$.	310. $87^{\circ}26'47''$.	311. $34^{\circ}56'53''$.	312. $19^{\circ}28'17''$.
314. $108^{\circ}36'41''$.	315. $12^{\circ}27'56''$.	316. $164^{\circ}21'28''$.	317. $92^{\circ}7'28''$.
319. $208^{\circ}2'5''$ и $331^{\circ}57'55''$.	320. $72^{\circ}10'28''$ и $287^{\circ}49'32''$.	321. $101^{\circ}18'35''$ и $281^{\circ}18'35''$.	322. $54^{\circ}7'4''$ и $234^{\circ}7'4''$.
324. $13^{\circ}17'25''$ и $166^{\circ}12'35''$.	325. 0,42888.	326. — 0,57638.	327. — 1,67576.
329. 13,2389.	329. 26,427.	330. 0,066774.	331. 0,33697.
333. 1,0565.	334. 0,35381.	335. 0,80248.	336. 0,27393.
338. 0,91016.	339. 0,44427.	340. 0,99713.	341. — 0,958.
343. 0,025.	344. 2,69243.	345. 0,50717.	346. 1,0878.
348. 0,73702.	349. 0,85834.	350. — 0,99908.	351. 0,20885.
		352. 5,3258	

356. 0,10279. 354. 0,80664. 355. 0,2735. 356. 0,68049. 357. 1,0526.
 358. 0,002545. 359. 2,0311. 360. 0,82824. 361. 0,30001. 362. 0,8745.
 363. 0,53809. 364. 0,15283. 365. 0,50457. 366. 0,26570. 367. 0,83070.
 368. 1,03624. 369. 0,22991. 370. 3,2474. 371. 0,16662. 372. — 0,78847.
 373. 1,0004. 374. $71^{\circ}12'38''$. 375. $12^{\circ}48'41''$. 376. $56^{\circ}22'10''$. 377. $161^{\circ}46'14''$.
 378. $23^{\circ}5'36''$. 379. $74^{\circ}1'50''$. 380. $135^{\circ}34'10''$. 381. $85^{\circ}37'27''$. 382. $44^{\circ}36'24''$.
 383. $36^{\circ}51'27''$. 384. $46^{\circ}25'53''$. 385. $7^{\circ}59'40''$. 386. $12^{\circ}34'40''$. 387. $45^{\circ}36'29''$.
 388. $50^{\circ}28'12''$. 389. $62^{\circ}3'17''$. 390. $11^{\circ}46'9''$. 391. $22^{\circ}28'6''$. 392. $57^{\circ}31'45''$.
 393. $86^{\circ}46'56''$. 394. $47^{\circ}40'12''$. 395. $84^{\circ}46'$. 396. $81^{\circ}51'31''$. 397. $33^{\circ}21'2''$.
 398. $43^{\circ}54'38''$. 399. $57^{\circ}25'38''$. 400. $54^{\circ}25'33''$. 401. $11^{\circ}16'54''$. 402. $136^{\circ}16'43''$.

Отдѣлъ VII. 1. $2 \sin 39^{\circ}30' \cdot \cos 22^{\circ}30'$. 2. $2 \sin 15^{\circ}59'51'' \cdot \cos 32^{\circ}47'$.

3. $2 \sin 50^{\circ}39'23'' \cdot \sin 1^{\circ}38'37''$. 4. $2 \sin 52^{\circ}59'10'' \cdot 5 \cdot \cos 20^{\circ}59'10'' \cdot 5$.

5. $4 \cos 45^{\circ} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(45^{\circ} - \frac{\alpha}{2} \right)$. 6. $\sin(A+B) \sin(A-B)$.

7. $-\sin(A+B) \sin(A-B)$. 8. $-\cos(\alpha-\beta) \cos(\alpha+\beta)$.

9. $\frac{\sin(A \pm B)}{\cos A \cos B}$. 10. $\frac{\sin(B \pm A)}{\sin A \sin B}$. 11. $\frac{\sin(A+B) \sin(A-B)}{\cos^2 A \cos^2 B}$.

12. $-\frac{\sin(A+B) \sin(A-B)}{\sin^2 A \sin^2 B}$. 13. Положивъ $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b \sin \alpha}$, найдемъ:

$x = \operatorname{tg}(\varphi - 45^{\circ})$. 14. Положивъ $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b \sin \beta \sin \gamma}{a \sin \alpha}$, найдемъ:

$x = \frac{b\sqrt{2} \sin \beta \cos(45^{\circ} - \varphi)}{c \sin \varphi}$. 15. Положивъ $\frac{b}{a} = \cos \varphi$, получимъ:

$x = 2\sqrt{a} \cos(\varphi - 45^{\circ})$. 16. Положивъ $\frac{b}{a} \sin \varphi$, получ. $x = 2 \sec \varphi$. 17. По-

ложивъ $b - a \operatorname{tg} \varphi$, найдемъ: $x = \frac{2a \cos^2 \frac{1}{2} \varphi}{\cos \varphi}$, когда беремъ + передъ кор-

немъ и $x = -\frac{2a \sin^2 \frac{1}{2} \varphi}{\cos \varphi}$, когда беремъ — передъ корнемъ

18. Положивъ $b - a \sin \varphi$, получимъ: $x = a\sqrt{2} \sin(\varphi + 45^{\circ})$

19. $2 \operatorname{tg} \alpha \cos \left(45^{\circ} - \frac{\alpha}{2} \right)$. 20. $S = 5^{\circ}46'6'', 52 + \pi$. 21. $S = 2\pi - 39^{\circ}14'14'', 4$.

22. $x = 2\pi \cdot 180^{\circ} + 19^{\circ}39'6'', 91$; $y = 2\pi \cdot 180^{\circ} + 3^{\circ}39'6'', 91$.

23. $x = 2\pi \cdot 180^{\circ} + 31^{\circ}34'8'', 98$; $y = 2\pi \cdot 180^{\circ} + 41^{\circ}14'7'', 07$.

24. $x = \pi \cdot 180^{\circ} + 15^{\circ}11'23'', 68$; $y = \pi \cdot 180^{\circ} + 1^{\circ}36'', 32$.

25. $x = \pi + 47^{\circ}4'52'', 225$; $y = \pi + 17^{\circ}4'10'', 225$.

26. $x = \pi + 30^{\circ}30'35'', 68$; $y = -\pi + 7^{\circ}52'39'', 36$.

27. $r = 1,1220096$. 28. $r = 0,3311016$. 29. $r = 0,8956794$ и $0,007201238$.

30. $x = 0,3951657$ и $1,946501$. 31. $x = 9,4337$ и $-369,8587$.

32. $x = 0,3744017$ и $-0,0488018$. 33. $x = 0,250781$ и $-3,377174$.

34. $x = 1,231726$ и $-822,2009$. 35. $x = -0,0622722$ и $-1169,021$.

36. $x = 2\pi - 31^{\circ}7'8'', 84$ и $r = 2\pi + 152^{\circ}44'4'', 28$. 37. $x = 2 \cos 20^{\circ}$, $-2 \sin 10^{\circ}$

и $-2 \cos 40^{\circ}$. 38. $x = 1,692021$, $-3,048917$ и $1,356896$.

39. $x = -3,931026$, $x = 1,986513 + 0,8473501 \cdot \sqrt{1}$

40. $x = 2,631642$, $x = -1,198309 \pm 1,129279 \cdot \sqrt{1}$.

41. $x = -1, \sqrt{3} - 4$ и $-\sqrt{3} - 4$. 42. Означивъ буквою x расстояние отъ центра полушара до плоскости сечения; тогда исконое уравнение будетъ: $x^3 - 3x + 1 = 0$; откуда $x = 0,3472864$ арш.

43. Означивъ буквою x искомую радиусъ, найдемъ уравнение: $x^3 - 7\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$; откуда $x = 2,066546$ фута.

Отдѣлъ IX. 1. $B = 41^{\circ}21'$; $a = 28,52614$; $b = 25,10497$.

2. $a = 30,05948$; $b = 95,37518$; $B = 72^{\circ}30'24''$.

3. $a = 415,6359$; $b = 240,0275$; $A = 59^{\circ}59'11''$, 6.

4. $a = 36,29673$; $b = 44,31191$; $A = 50^{\circ}40'42''$, 4.

5. $a = 1,904085$; $b = 4,180904$; $B = 65^{\circ}15'13''$, 5.

6. $a = 0,0002747$; $b = 0,0004926$; $A = 29^{\circ}8'31''$, 81.

7. $a = 0,04135724$; $b = 0,07410853$; $B = 50^{\circ}50'8''$, 62.

8. $a = 218710,9$; $b = 330469$; $A = 33^{\circ}29'50''$, 53.

9. $a = 0,6898892$; $b = 0,08234992$; $A = 83^{\circ}11'34''$, 76.

10. $a = 2,180206$; $b = 1,721264$; $A = 51^{\circ}42'32''$, 56.

11. $b = 82,16447$; $A = 34^{\circ}45'0''$, 83; $B = 55^{\circ}14'59''$, 17.

12. $b = 5102,258$; $A = 41^{\circ}50'38''$, 38; $B = 48^{\circ}0'21''$, 62.

13. $a = 1,368947$; $A = 70^{\circ}45'7''$, 74; $B = 19^{\circ}14'52''$, 26.

14. $a = 10,94503$; $B = 65^{\circ}47'42''$, 59; $B = 24^{\circ}12'17''$, 41.

15. $a = 16,56247$; $A = 19^{\circ}6'22''$, 5; $B = 70^{\circ}53'37''$, 5.

16. $b = 0,0011147$; $A = 37^{\circ}13'43''$, 83; $B = 52^{\circ}46'16''$, 17.

17. $b = 107303,1$; $A = 27^{\circ}57'21''$, 46; $B = 62^{\circ}2'38''$, 54.

18. $a = 0,9998981$; $A = 89^{\circ}10'55''$ 09; $B = 49'4''$, 91.

19. $a = 0,5117391$; $A = 32^{\circ}38'21''$, 49; $B = 57^{\circ}23'38''$, 51.

20. $b = 1,112842$; $A = 26^{\circ}54'44''$, 48; $B = 63^{\circ}5'15''$, 52.

21. $b = 7,681146$; $A = 75^{\circ}9'53''$, 6; $B = 14^{\circ}50'6''$, 4.

22. $a = 0,1001368$; $A = 11^{\circ}33'10''$, 66; $B = 78^{\circ}25'19''$, 34.

23. $b = 2,223215$; $A = 82^{\circ}29'7''$, 74; $B = 7^{\circ}30'52''$, 26.

24. $a = 0,01093889$; $A = 7^{\circ}51'33''$ 5; $B = 82^{\circ}8'26''$, 5.

25. $b = 165,2727$; $C = 181,494$; $B = 65^{\circ}35'30''$.

26. $b = 455,7333$; $C = 603,7456$; $A = 10^{\circ}5'18''$.

27. $a = 535,3354$; $C = 1134,248$; $A = 28^{\circ}0'32''$, 2.

28. $a = 2,249404$; $C = 2,649494$; $B = 31^{\circ}53'51''$, 36.

29. $b = 0,0068659$; $C = 0,0069384$; $B = 81^{\circ}42'47''$, 92.

30. $b = 0,5852281$; $C = 1,025545$; $A = 55^{\circ}12'15''$, 74.

31. $a = 0,493477$; $C = 0,5020198$; $A = 79^{\circ}25'12''$, 63.

32. $a = 147006,4$; $C = 451481,8$; $B = 70^{\circ}59'51''$, 16.

33. $b = 72,617$; $C = 90,80963$; $B = 53^{\circ}5'52''$, 16.

34. $a = 0,0946867$; $C = 0,579606$; $A = 90^{\circ}24'7''$, 93.

35. $c = 106,8317$; $A = 35^{\circ}28'31''$, 19; $B = 54^{\circ}31'28''$ 81.

36. $c = 18,42525$; $A = 54^{\circ}29'54''$, 49; $B = 35^{\circ}30'5''$, 51.

37. $c = 0,1529598$; $A = 18^{\circ}33'54''$, 9; $B = 71^{\circ}26'5''$, 1.

38. $c = 3,652165$; $A = 55^{\circ}13'41''$, 78; $B = 34^{\circ}46'18''$, 22.

39. $c = 148727,6$; $A = 29^{\circ}25'08''$; $B = 87^{\circ}53'31''$ 92.

40. $c = 1,021981$; $A = 15^{\circ}54'3''$, 96; $B = 74^{\circ}5'56''$, 04.

41. $c = 4,176819$; $A = 16^{\circ}41'16'',94$; $B = 37^{\circ}18'13'',06$
 42. $c = 0,1818742$; $A = 2^{\circ}24'25'',1$; $B = 61^{\circ}36'34'',9$.
 43. $c = 14,2922$; $A = 45^{\circ}48'6'',45$; $B = 44^{\circ}11'59'',55$
 44. $c = 0,0294698$; $A = 10^{\circ}33'30'',92$; $B = 73^{\circ}26'20'',08$.
 45. $a = 4,5$, $c = 4,5\sqrt{2}$, $B = 45^{\circ}$ 46. $b = 10\sqrt{3}$; $c = 20$, $A = 30^{\circ}$
 47. $a = 0,28$; $b = 0,28\sqrt{3}$; $B = 60^{\circ}$ 48. $a = 6\sqrt{3}$, $A = 60^{\circ}$, $B = 30^{\circ}$,
 49. $a = 4(\sqrt{2} - 1)$; $c = 4\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$; $A = 67^{\circ}30'$ 50. $a = 5\sqrt{2} = \sqrt{3}$;
 $b = 5\sqrt{2 + \sqrt{3}}$; $B = 75^{\circ}$ 51. $c = 4$, $A = 30^{\circ}$; $B = 60^{\circ}$.
 52. $b = 10,93252$; $h = 13,17937$; $B = 45^{\circ}3'12''$.
 53. $b = 2,450223$; $h = 0,9801405$; $B = 102^{\circ}10'38'',8$.
 54. $b = 0,193149$; $h = 0,2371995$; $A - C = 66^{\circ}58'16'',91$.
 55. $a = 0,2713301$; $h = 0,1356283$; $B = 120^{\circ}14'',6$.
 56. $a = 0,665354$; $h = 0,1206705$; $B = 150^{\circ}6'',08$.
 57. $a = 335,6585$; $h = 324,0278$; $A = C = 71^{\circ}52'22'',64$
 58. $h = 0,885811$; $B = 45^{\circ}53'23'',46$, $A = C = 67^{\circ}3'18'',27$.
 59. $h = 0,6693228$; $B = 114^{\circ}39'50'',52$; $A = C = 32^{\circ}40'4'',74$.
 60. $b = 0,0920441$, $B = 136^{\circ}12'30'',42$, $A = C = 21^{\circ}53'44'',79$.
 61. $a = 0,261528$; $B = 115^{\circ}14'15'',8$, $A - C = 32^{\circ}22'52'',1$.
 62. $a - c = 1,630002$; $b = 2,661002$, $B = 108^{\circ}49'3'',1$.
 63. $a = c = 1258,52$; $b = 1121,126$; $A - C = 63^{\circ}33'0'',47$.
 64. $b = 2,03823$, $c = 2,391315$; $A = 68^{\circ}44'15'',6$.
 65. $b = 2,13067$; $c = 0,995424$, $A = 110^{\circ}33'30''$.
 66. $a = 0,3440775$, $b = 0,325561$, $C = 110^{\circ}16'52'',14$.
 67. $b = 9,092525$; $c = 5,614978$; $A = 87^{\circ}18'20'',3$.
 68. $a = 2,516562$; $c = 2,216517$; $B = 193^{\circ}0'58'',2$.
 69. $a = 1,524989$; $c = 0,565662$; $A = 112^{\circ}40'3'',74$.
 70. $b = 19,3587$; $c = 28,40575$, $A = 140^{\circ}7'57'',55$.
 71. $a = 4,484422$; $b = 2,608649$; $A = 93^{\circ}32'25'',2$.
 72. $a = 2,273478$; $c = 3,336401$; $C = 117^{\circ}58'41''$.
 73. $b = 5552,145$; $c = 5257,557$; $C = 39^{\circ}54'33''$.
 74. $c = 4,991293$; $A = 97^{\circ}58'48'',37$, $B = 52^{\circ}23'47'',63$.
 75. $c = 280,7817$; $A = 112^{\circ}29'55'',06$; $B = 18^{\circ}44'41'',08$.
 76. $b = 1,804414$, $A = 45^{\circ}21'21'',2$, $C = 90^{\circ}42'0'',8$
 77. $c = 2,765869$; $A = 14^{\circ}6'36'',17$; $B = 14^{\circ}5'30'',77$.
 78. $a = 10,81321$; $B = 43^{\circ}38'49'',27$; $C = 67^{\circ}27'25'',23$.
 79. $c = 0,1144694$, $A = 48^{\circ}59'20'',81$, $C = 123^{\circ}43'2'',59$
 80. $b = 15,36485$; $A = 56^{\circ}41'46'',83$, $C = 31^{\circ}13'15'',37$.
 81. $c = 1,4085084$; $A = 9^{\circ}53'49'',39$; $B = 22^{\circ}5'12'',21$.
 82. $a = 13,68239$, $B = 84^{\circ}29'45'',21$, $C = 45^{\circ}29'39'',79$.
 83. $b = 8,931151$, $A = 112^{\circ}17'43'',65$; $C = 23^{\circ}59'',06$.
 84. $A = 133^{\circ}8'48'',76$, $B = 18^{\circ}5'15'',06$, $C = 28^{\circ}13'56'',16$
 85. $A = 95^{\circ}3'30'',12$; $B = 41^{\circ}56'39'',72$, $C = 49^{\circ}19'10'',81$.
 86. $A = 30^{\circ}40'17'',88$, $B = 65^{\circ}31'1'',18$, $C = 77^{\circ}42'7'',96$.
 87. $A = 19^{\circ}42'33'',62$, $B = 24^{\circ}53'26'',04$, $C = 135^{\circ}24'0'',34$.

88. $A = 114^{\circ}42'42'',9$; $B = 40^{\circ}53'59'',16$; $C = 24^{\circ}23'17'',96$.
 89. $A = 18^{\circ}58'33'',18$; $B = 122^{\circ}8'5'',86$; $C = 38^{\circ}53'20'',96$.
 90. $A = 73^{\circ}19'12'',38$; $B = 50^{\circ}34'50'',22$; $C = 56^{\circ}5'57'',42$.
 91. $A = 26^{\circ}45'9'',64$; $B = 80^{\circ}16'37'',98$; $C = 72^{\circ}58'12'',38$.
 92. $A = 30^{\circ}22'47'',55$; $B = 138^{\circ}12'46'',04$; $C = 11^{\circ}24'26'',4$.
 93. $A = 37^{\circ}22'1'',13$; $B = 87^{\circ}12'39'',93$; $C = 55^{\circ}25'18'',65$.
 94. $A = 48^{\circ}23'42'',24$; $B = 72^{\circ}31'9'',68$; $C = 59^{\circ}58'',08$.
 95. $A = 33^{\circ}20'8'',22$; $B = 56^{\circ}12'56'',8$; $C = 90^{\circ}26'54'',96$.
 96. Невозможно. 97. Невозможно.
 98. $\cos A = \sqrt{\frac{25}{26}}$; $\cos B = -\sqrt{0,9}$; $\cos C = \sqrt{\frac{64}{65}}$
 99. $\cos A = \sqrt{\frac{9}{20}}$; $\cos B = \sqrt{\frac{4}{15}}$; $\cos C = \sqrt{\frac{1}{12}}$.
 100. $c = 1248,932$; $A = 12^{\circ}43'35'',84$; $C = 145^{\circ}40'35'',76$
 101. $c = 2,534408$; $B = 47^{\circ}47'10'',86$; $C = 89^{\circ}31'',14$
 102. $b = 15,79974$; $B = 90^{\circ}51'9'',04$; $C = 30^{\circ}26'34'',16$.
 103. $a = 0,32442$, $B = 22^{\circ}5'42'',22$; $A = 0^{\circ}53'49'',38$.
 104. $b = 120$; $B = 18^{\circ}44'41'',1$; $C = 48^{\circ}45'23'',84$.
 105. $b = 99,9998$; $B = 11^{\circ}2'0'',93$; $C = 15^{\circ}17'21'',01$.
 106. $c = 0,1031408$; $B = 48^{\circ}46'0'',92$; $C = 50^{\circ}51'51'',93$.
 107. $c = 576,9367$; $A = 30^{\circ}16'28'',84$; $C = 124^{\circ}16'43'',36$ или
 $c = 58,76241$; $A = 149^{\circ}43'31'',16$; $C = 4^{\circ}49'41'',04$.
 108. $c = 13,83269$; $A = 44^{\circ}3'33'',64$; $C = 97^{\circ}41'57'',19$ или
 $c = 1,414937$; $A = 135^{\circ}56'26'',36$; $C = 5^{\circ}49'4'',47$.
 109. $b = 409,7873$; $B = 121^{\circ}33'54'',24$; $C = 34^{\circ}2'21'',48$ или
 $b = 80,45593$; $B = 9^{\circ}38'37'',2$; $C = 145^{\circ}57'38'',52$.
 110. Невозможно. 111. Задача невозможна. 112. Задача невозможна.
 113. $a = 15\sqrt{2}$; $c = 15(\sqrt{3} + 1)$; $B = 45^{\circ}$.
 114. $b = 6,4\sqrt{6}$; $c = 6,4(\sqrt{3} + 1)$; $C = 75^{\circ}$.
 115. $b = 15\sqrt{2} + 5\sqrt{6}$. 116. $c = 8\sqrt{3}$; $A = 30^{\circ}$; $B = 90^{\circ}$.
 117. $a = 3$; $C = 45^{\circ}$; $B = 90^{\circ}$. 118. $c = 2$; $A = 15^{\circ}$; $B = 30^{\circ}$.
 119. $b = 4(\sqrt{3} - 1)$; $A = 45^{\circ}$; $C = 120^{\circ}$.
 120. $A = 45^{\circ}$; $B = 75^{\circ}$; $C = 60^{\circ}$. 121. $A = 45^{\circ}$; $B = 15^{\circ}$; $C = 120^{\circ}$.
 122. $2a \sin \frac{1}{2} \alpha = 1282$. 111 ар.; $2a \cos \frac{1}{2} \alpha = 3500,596$.
 123. $d \sin \frac{1}{2} \alpha = 0,2648388$; $d \cos \frac{1}{2} \alpha = 0,7080934$; $\frac{1}{2} d^2 \sin \alpha = 0,1875306$.
 124. $a\sqrt{3} \operatorname{tg} 10^{\circ} = 305,4073$; $\frac{1}{2} a(1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} 10^{\circ}) = 347,2963$; $a\sqrt{3} \operatorname{tg} 10^{\circ}$.
 125. $2r \sin \frac{1}{2} \alpha = 194$; $r \cos \frac{1}{2} \alpha = 78,84165$.
 126. $r - a : 2 \sin \frac{\alpha}{2} = 31,59155$. 127. $r = a \sin \frac{1}{2} \alpha = 0,4328108$.
 128. $\cos \frac{1}{2} \alpha = a : 2r$; $\alpha = 144^{\circ}40'41'',88$. 129. 2,10574 метра.
 130. Борте 5656, 854 саж. 131. 1) $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R-r}{a}$; 2) $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R+r}{a}$.

$$132. \cos A = \sqrt{\frac{1}{m}}; A = 85^{\circ}14'11'',01. \quad 133. a \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} =$$

$$134. R \cos \varphi = 781,2635 \text{ мил.} \quad 135. \cos \varphi = 180a : \pi R; 2603' \text{ сѣв. или южн. широты.} \quad 136. \frac{r(b-a)\pi \cos \varphi}{180}.$$

$$137. \text{I) } s = \pi r^2 \sec \alpha; v = \frac{1}{3} \pi r^3 \operatorname{tg} \alpha; \text{II) } s = \frac{\pi h^2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}; v = \frac{1}{3} \pi h^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha; \text{III) } s = \frac{1}{2} \pi a^2 \sin 2\beta;$$

$$v = \frac{1}{8} \pi a^3 \sin \beta \sin 2\beta. \quad 138. 4\pi a^2 \sin^2 \alpha \sin^2 (45^{\circ} - \frac{1}{2} \alpha).$$

$$139. 4\pi R^2 \sin^2 \frac{1}{2} (\varphi - \varphi_1) \cos^2 \frac{1}{2} (\varphi + \varphi_1) = 1246766 \square \text{ мил.}$$

$$140. \frac{4}{9} \pi R^3 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha = 1,736165 \text{ куб. фута.} \quad 141. c = s : 2 \cos^2 \frac{A}{2}$$

$$142. \sin (A - 45^{\circ}) = \frac{d}{c\sqrt{2}}. \quad 143. \cos (45^{\circ} - A) = \frac{s}{c\sqrt{2}}.$$

$$144. \text{1) } c = \frac{s}{\sqrt{2} \cos (A - 45^{\circ})}; \quad \text{2) } c = \frac{d}{\sqrt{2} \sin (A - 45^{\circ})}.$$

$$145. c\sqrt{2} \cos \frac{A}{2} \cos (45^{\circ} - \frac{A}{2}) = p. \quad 146. 2c\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} \sin (45^{\circ} - \frac{A}{2}) = d.$$

$$147. c = s - 2r; \sin (45^{\circ} + A) = s\sqrt{\frac{1}{2}} : (s - 2r).$$

$$148. c = r : \sqrt{2} \sin \frac{A}{2} \sin (45^{\circ} - \frac{A}{2}). \quad 149. \text{I) } a \sin (45^{\circ} - \frac{A}{2}) = r\sqrt{2} \cos \frac{A}{2};$$

$$r = c\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} \sin (45^{\circ} - \frac{A}{2}). \quad 150. \frac{d \sin \psi}{\sin \alpha} = 6,552733; \frac{d \sin \varphi}{\sin \alpha} = 13,85051.$$

$$151. 0,8752686; 125^{\circ}26'42'',81. \quad 152. 4,822978; 13,35535.$$

$$153. \text{Основ.} = 0,6779295; \text{одна изъ равн. стор.} = 1,030649.$$

$$154. 38^{\circ}34'21'',62. \quad 155. \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{r-r'}{r+r'}}.$$

$$156. \sin (2A\mathcal{O}\mathcal{Y} + \mathcal{S}) = \frac{b}{2r}, \text{ гдѣ } \sin \mathcal{S} = \frac{a}{2r}.$$

$$157. r = (\frac{1}{2}a + b) \operatorname{cosec} \alpha - \sqrt{(a+b)b} \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$158. AB = 3,7543; CD = 7,8105, AD = 8,0726; A = 110^{\circ}43'',8$$

$$B = 100^{\circ}40'23'',6. \quad 159. \cos \frac{1}{2}(A - B) = s \sin \frac{1}{2}C; c = \sin (B + \frac{1}{2}C).$$

$$160. \sin \frac{1}{2}(A - B) = \frac{d}{c} \cos \frac{1}{2}C. \quad 161. a = s \sin A \cdot 2 \cos \frac{1}{2}C \sin (A + \frac{1}{2}C).$$

$$162. c = d \cos \frac{1}{2}C : \sin (B - A). \quad 163. \cos \frac{1}{2}C = (a + b)m : 2ab.$$

$$164. b = m \cos \frac{1}{2}(B - C) \sin C. \quad 165. \operatorname{tg} \frac{1}{2}B = (\pi - \sigma) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}A : (s + \sigma).$$

$$166. \operatorname{tg} \frac{1}{2}B = (c - d) \operatorname{tg} \frac{1}{2}A : (c + d). \quad 167. a = b : s \operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta. \operatorname{tg} \frac{1}{2}C.$$

$$168. a + b = d \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\delta. \operatorname{ctg} \frac{1}{2}C. \quad 169. a = p \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C.$$

$$170. a = d \cos \frac{A}{2} : 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \quad 171. \operatorname{tg} \frac{1}{2} B = h : (2p - h \operatorname{ctg} \frac{1}{2} A).$$

$$172. 2b \sin \frac{1}{2} (A - C) \cos \frac{1}{2} (A + C) = d. \quad 173. a + c = s : \sin B, \\ a - c = b \sin \frac{1}{2} (A - C) : \cos \frac{1}{2} B.$$

$$174. \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c)(h_a h_b + h_a h_c - h_b h_c)}{4h_a^2 h_b h_c}}.$$

$$175. s \cdot \cos^2 \frac{B-C}{2} - 2h \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B+C}{2} - s \sin^2 \frac{A}{2} = 0.$$

$$176. \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{a^2 - d^2}{2ah} \quad 177. 2h \sin (B + C + \varphi) = a \cos \delta \cos \varphi, \text{ гдѣ } \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{2h}.$$

$$178. \sin \left(\frac{B-C}{2} - \varphi \right) = 2 \sin \varphi \sin \frac{A}{2}, \text{ гдѣ } \operatorname{tg} \varphi = \frac{s}{s+t} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$$

$$180. v = 2abc \sqrt{\sin \delta \sin (\delta - \alpha) \sin (\delta - \beta) \sin (\delta - \gamma)}, \text{ гдѣ } \alpha + \beta + \gamma = 2\delta.$$

$$181. a = 28,526; b = 25,105; B = 41^{\circ} 21'.$$

$$182. a = 30,059; b = 95,376; B = 72^{\circ} 30' 24''.$$

$$183. a = 415,63; b = 240,09; A = 59^{\circ} 59' 12''.$$

$$184. a = 36,597; b = 44,064; B = 50^{\circ} 42' 42''.$$

$$185. a = 1,904; b = 4,1308; B = 65^{\circ} 15' 13''.$$

$$186. a = 0,00027466; b = 0,00049261; A = 29^{\circ} 32''.$$

$$187. a = 0,041357; b = 0,074108; B = 60^{\circ} 50' 9''.$$

$$188. a = 218760; b = 330546; A = 33^{\circ} 2' 51''.$$

$$189. a = 0,68989; b = 0,08235; A = 83^{\circ} 11' 35''.$$

$$190. a = 2,18025; b = 1,7213; A = 51^{\circ} 42' 33''.$$

$$191. b = 82,165; A = 34^{\circ} 45'; B = 55^{\circ} 15'.$$

$$192. a = 10,946; A = 65^{\circ} 47' 41''; B = 24^{\circ} 12' 19''.$$

$$193. a = 1,369; A = 70^{\circ} 45' 8''; B = 19^{\circ} 14' 52''.$$

$$194. b = 5102,2; A = 41^{\circ} 50' 39''; B = 48^{\circ} 02' 21''.$$

$$195. a = 16,563; A = 19^{\circ} 6' 24''; B = 70^{\circ} 53' 36''.$$

$$196. b = 0,0011147; A = 37^{\circ} 13' 42''; B = 52^{\circ} 46' 18''.$$

$$197. b = 107,302; A = 27^{\circ} 57' 21''; B = 62^{\circ} 2' 39''.$$

$$198. a = 0,99988; A = 89^{\circ} 10' 55''; B = 41^{\circ} 5''.$$

$$199. a = 0,51176; A = 32^{\circ} 36' 23''; B = 57^{\circ} 23' 37''.$$

$$200. b = 1,1128; A = 26^{\circ} 14' 45''; B = 63^{\circ} 5' 15''.$$

$$201. b = 7,681; A = 14^{\circ} 50' 6''; B = 75^{\circ} 0' 54''.$$

$$202. a = 0,10012; A = 11^{\circ} 33' 10''; B = 78^{\circ} 26' 50''.$$

$$203. b = 2,2232; A = 82^{\circ} 29' 8''; B = 7^{\circ} 30' 52''.$$

$$204. a = 0,010936; A = 7^{\circ} 51' 24''; B = 82^{\circ} 8' 36''.$$

$$205. b = 165,27; c = 181,49; B = 65^{\circ} 35' 30''.$$

$$206. b = 455,73; c = 603,76; A = 40^{\circ} 59' 18''.$$

$$207. a = 535,27; c = 1134,3; A = 28^{\circ} 9' 32''.$$

$$208. a = 2,2498; c = 2,6498; B = 31^{\circ} 53' 37''.$$

$$209. b = 0,0068061; c = 0,0069383; B = 81^{\circ} 42' 18''.$$

$$210. b = 0,58524; c = 1,0256; A = 5^{\circ} 12' 16''.$$

211. $a = 0,49348$; $c = 0,50202$; $A = 70^{\circ}25'13''$.
 212. $a = 147007$; $c = 454490$; $B = 70^{\circ}59'51''$.
 213. $b = 72,6$; $c = 90,796$; $B = 53^{\circ}5'28''$.
 214. $a = 0,094688$; $c = 0,5796$; $A = 9^{\circ}24'8''$.
 215. $c = 106,83$; $A = 35^{\circ}28'31''$; $B = 54^{\circ}31'29''$.
 216. $c = 18,425$; $A = 54^{\circ}29'56''$; $B = 35^{\circ}30'41''$.
 217. $c = 0,15296$; $A = 18^{\circ}33'54''$; $B = 71^{\circ}26'6''$.
 218. $c = 3,652$; $A = 55^{\circ}13'42''$; $B = 34^{\circ}46'18''$.
 219. $c = 148728$; $A = 2^{\circ}6'25''$; $B = 87^{\circ}53'45''$.
 220. $c = 1,02198$; $A = 15^{\circ}54'4''$; $B = 74^{\circ}5'56''$.
 221. $c = 4,1768$; $A = 16^{\circ}11'47''$; $B = 73^{\circ}18'13''$.
 222. $c = 0,18188$; $A = 25^{\circ}23'2''$; $B = 61^{\circ}36'32''$.
 223. $c = 14,292$; $A = 45^{\circ}47'58''$; $B = 44^{\circ}12'2''$.
 224. $c = 0,029469$; $A = 16^{\circ}33'41''$; $B = 73^{\circ}26'19''$.
 225. $b = 10,932$; $h = 13,179$; $B = 45^{\circ}3'12''$.
 226. $b = 2,1301$; $h = 0,9801$; $B = 102^{\circ}10'38''$.
 227. $h = 0,19445$; $h = 0,22719$; $A = C = 66^{\circ}58'17''$.
 228. $a = 0,27153$; $h = 0,13563$; $B = 120^{\circ}1'4''$.
 229. $a = 61,516$; $h = 57,476$; $A = C = 63^{\circ}7'16''$.
 230. $h = 0,8858$; $B = 13^{\circ}54'22''$; $A = C = 67^{\circ}41''$.
 231. $b = 0,092045$; $B = 136^{\circ}12'28''$; $A = C = 21^{\circ}53'46''$.
 232. $a = c = 9,2613$; $B = 115^{\circ}14'12''$; $A = C = 32^{\circ}22'54''$.
 233. $a = c = 1,6299$; $b = 2,651$; $B = 108^{\circ}49'4''$.
 234. $a = c = 1258,5$; $b = 1121,1$; $A = C = 63^{\circ}33'0'',5$.
 235. $a = 0,1311$; $c = 0,10314$; $A = 80^{\circ}22'8''$.
 236. $b = 2,1307$; $c = 0,99542$; $A = 110^{\circ}35'30''$.
 237. $a = 0,34408$; $b = 0,32557$; $C = 11^{\circ}16'52''$.
 238. $b = 9,0926$; $c = 5,615$; $A = 87^{\circ}18'21''$.
 239. $a = 2,5166$; $c = 2,2165$; $B = 190^{\circ}30'58''$.
 240. $b = 147,11$; $c = 152,87$; $C = 47^{\circ}35'54''$.
 241. $b = 19,359$; $c = 28,406$; $A = 140^{\circ}7'57''$.
 242. $a = 4,4844$; $b = 2,6087$; $A = 93^{\circ}32'35''$.
 243. $a = 2,2734$; $c = 3,3352$; $C = 117^{\circ}58'41''$.
 244. $b = 5552,1$; $c = 5257,6$; $C = 39^{\circ}54'33''$.
 245. $c = 4,9914$; $A = 97^{\circ}58'49''$; $B = 52^{\circ}23'47''$.
 246. $c = 280,78$; $A = 112^{\circ}29'54''$; $B = 18^{\circ}14'42''$.
 247. $c = 79,658$; $A = 35^{\circ}1'58''$; $B = 31^{\circ}6'26''$.
 248. $b = 1,8045$; $A = 45^{\circ}21'20''$; $C = 90^{\circ}42'2''$.
 249. $a = 10,813$; $B = 43^{\circ}38'49'',5$; $C = 67^{\circ}27'25'',5$.
 250. $c = 0,11146$; $B = 123^{\circ}43'3''$; $A = 18^{\circ}59'21''$.
 251. $b = 15,365$; $A = 56^{\circ}41'47''$; $C = 31^{\circ}13'16''$.
 252. $c = 1,1085$; $A = 99^{\circ}54'49''$; $B = 22^{\circ}54'1''$.
 253. $a = 13,682$; $B = 84^{\circ}29'48'',5$; $C = 15^{\circ}29'27'',5$.
 254. $b = 8,9326$; $A = 112^{\circ}17'46''$; $C = 23^{\circ}56''$.
 255. $A = 133^{\circ}8'48''$; $B = 38^{\circ}15'36''$; $C = 18^{\circ}3'14''$.

256. $A = 95^{\circ}3'32''$; $B = 41^{\circ}36'38''$; $C = 43^{\circ}11'50''$.
 257. $A = 36^{\circ}46'48''$; $B = 65^{\circ}31'14''$; $C = 77^{\circ}42'10''$.
 258. $A = 48^{\circ}28'14''$; $B = 93^{\circ}28'42''$; $C = 38^{\circ}3'14''$.
 259. $A = 18^{\circ}58'40''$; $B = 122^{\circ}7'32''$; $C = 38^{\circ}53'18''$.
 260. $A = 47^{\circ}25'50''$; $B = 78^{\circ}19'56''$; $C = 54^{\circ}11'16''$.
 261. $A = 19^{\circ}42'34''$; $B = 24^{\circ}53'26''$; $C = 135^{\circ}24'$.
 262. $A = 73^{\circ}19'12''$; $B = 50^{\circ}31'48''$; $C = 56^{\circ}5'58''$.
 263. $A = 37^{\circ}22'22''$; $B = 50^{\circ}25'18''$; $C = 87^{\circ}12'40''$. 264. Невозможно.
 265. $b = 15,797$; $B = 90^{\circ}52'21''$; $C = 30^{\circ}25'22''$.
 266. $c = 0,10299$; $B = 48^{\circ}18'51''$; $C = 50^{\circ}18'50''$.
 267. $c = 2,5344$; $B = 43^{\circ}47'13''$; $C = 89^{\circ}29''$.
 268. $a = 0,32441$; $A = 9^{\circ}53'49''$; $B = 22^{\circ}5'43''$.
 269. $b = 120,01$; $B = 18^{\circ}44'43''$; $C = 18^{\circ}45'22''$.
 270. $c = 13,831$; $A = 44^{\circ}1'18''$; $C = 97^{\circ}44'13''$ или
 $c = 1,4123$; $A = 135^{\circ}58'42''$; $C = 5^{\circ}46'49''$.
 271. $c = 576,93$; $A = 30^{\circ}16'30''$; $C = 124^{\circ}16'42''$ или
 $c = 58,767$; $A = 149^{\circ}43'30''$; $C = 4^{\circ}49'42''$.
 272. $b = 409,78$; $B = 121^{\circ}33'53''$; $C = 31^{\circ}2'23''$ или
 $b = 80,458$; $B = 9^{\circ}38'39''$; $C = 145^{\circ}57'37''$.
 273. Невозможно. 274. Невозможно.
- Отдѣлъ X. 1. $\operatorname{tg} \alpha = a \cdot b$; $\alpha = 10^{\circ}1'45''$, 77. 2. h : $\operatorname{tg} \alpha = 9,87$ саж
 3. 1264,96 фута 4. 396,53 фута 5. 155,8 саж 6. 180,1211 фута.
 7. 211,7583 саж. 8. $x = 6297'30''$, 78; $y = 150934'29''$, 22; $AD = 678,27$ саж;
 $CD = 421,35$ саж. 9. $x = 152^{\circ}50'48''$, 64; $y = 44^{\circ}16'59''$, 7;
 $AD = 130,605$ фута; $CD = 701,883$ фута. 10. $x = \sqrt{\frac{k+h}{k-l}}$, hl .
11. $h + \frac{a}{2b} \sqrt{(b+a)(3b-a)}$. 12. $h + \frac{b \sin \alpha \sin \gamma}{\sin(\frac{\xi}{2} + \gamma)} = 1710,39$ фута.
 13. $AB = a(1 + \sqrt{2})$; $BC = a\sqrt{2} + 1$ 2 14. $r = a(1 + \sqrt{\frac{1}{2}})$.
 15. $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})$ километра. 16. $a(3 - \sqrt{3})$ миль.
 17. $\frac{b \cos \alpha \sin \beta}{\sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}}; h + \frac{b \sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}}$.
 18. $AB = h + \frac{a}{3}$, $CD = h + \frac{3}{4}a$. 19. $h \cos(\frac{\alpha + \beta}{2} - \gamma) \sin \gamma \cos \frac{\beta - \alpha}{2}$.
 20. $\frac{h \sin(\beta + \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}$. 21. $\frac{h \sin \gamma \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta \sin(\alpha + \gamma)}$. 22. $AE = a \sqrt{\frac{c(a+b)}{ac - b^2}}$,
 $BE = b \sqrt{\frac{a(b+c)}{ac - b^2}}$; $\cos \theta = \frac{(a+b)(b+c)}{1ac}$.
- Отдѣлъ XI. 1. $\frac{1}{4}c^2 \sin 2A = 18,1273$ 2. $\frac{1}{2}a^2 \operatorname{ctg} A = 0,0648905$.
 3. $\frac{1}{2}b^2 \operatorname{tg} A = 14,45097$. 4. 0,1210459. 5. 883,9377. 6. 0,2792332.
 7. 176,2459. 8. 1,60305. 9. 11230,18 10. 54,03596. 11. 0,121016.

12. Зад. невозможно. 13. 0,7533798 14. 51,71913 15. 0,061819.

16. $h^2 \sin A = 1,246038$. 26. $(a^2 - b^2) \sin A \sin D = 2 \sin(A + D)$

27. $a = 0,8096979$ арш.; $s = 83,30321$ арш.

28. $p = 16,05233$ саж.; $s = 20,49333$ саж.

29. $a = 0,1429417$ саж.; $s = 1,4580001$ саж.

30. $p = 28,28582$ фута; $s = 63,6431$ фута. 31. 110,5697 [] арш.

32. $r = 22,8601$ метра; $R = 22,94713$ метра.

33. $r = 0,5818123$ саж.; $R = 0,5864566$ саж.

34. $\frac{1}{2}(r\alpha - r^2 \sin \alpha) = 0,2132403$ [] арш.

35. $\frac{a^2 k}{8} \operatorname{cosec}^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = 0,06081643$ [] фута, гдѣ k означаетъ длину дуги α , при радиусѣ, равномъ 1.

59. $p(p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = q$. 60. $A + B = 180^\circ - C$; $\operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} A = \frac{a^2 - b^2}{2q}$.

61. $B + C = 180^\circ - A$; $a^2 + b^2 + c^2 = 4q(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C)$.

62. $4 \cos^2 \alpha$. 63. $\frac{q}{q_1} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$; $\frac{R}{R_1} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.

64. $\frac{q_1}{q} = 2 \cos A \cos B \cos C$, $\frac{R_1}{R} = 2$, $\frac{r_1}{r} = \frac{\cos A \cos B \cos C}{2 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C}$.

66. $a = 2R \sin A$. 67. $a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = r \cos \frac{A}{2}$.

68. $a \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = r_a \cos \frac{A}{2}$. 69. $\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{r r_a}{r_b r_c}$.

70. $p = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$; $B + C = 180^\circ - A$.

71. $r = p \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}$; $B + C = 180^\circ - A$. 72. $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$.

73. $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$. 74. $r_a = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

75. $r_a = r \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$. 76. $r_a : r_b = \operatorname{ctg} \frac{B}{2} : \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$.

77. $\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = r : 4R \sin \frac{A}{2}$.

78. $\cos^2 \frac{C}{2} = \frac{r_a + r_b}{4R}$; $\sin \frac{A}{2} \sin(90^\circ - \frac{B}{2}) = r_a : 4R \cos \frac{C}{2}$.

79. $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r r_a}{q}$. 80. $\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{q}{r_b r_c}$.

Отдѣлъ XII. 1. $p = 5$ и $\varphi = 53^\circ 7' 48''$, 36 съ точн. до $0''$, 01.

2. $\sqrt{6}(\cos 30^\circ + \sqrt{1 - \sin 30^\circ}) = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{1-1})}{2}$.

3. $2(\cos 30^\circ + \sqrt{1 - \sin 30^\circ})$. 4. $\frac{1}{2}(2(\cos 60^\circ + \sqrt{1 - \sin 60^\circ})) = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{1-3})}{2}$.

5. $64(\cos 36^\circ - \sqrt{-1} \sin 36^\circ)$. 6. $\cos 2^\circ + \sqrt{-1} \sin 2^\circ$. 7. -1 и $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.
8. $\cos \frac{\pi}{6} + \sqrt{-1} \sin \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{2} + \sqrt{-1} \sin \frac{\pi}{2}$ и $\cos \frac{5\pi}{6} + \sqrt{-1} \sin \frac{5\pi}{6}$.
9. $\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + \sqrt{-1} \sin \frac{\pi}{12} \right)$, $\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + \sqrt{-1} \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ и $\sqrt{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + \sqrt{-1} \sin \frac{17\pi}{12} \right)$.
10. $\sqrt[4]{4}$, $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1 \pm \sqrt{10-2\sqrt{5}})\sqrt[4]{4}$ и $\frac{1}{4}(-\sqrt{5}-1 \pm \sqrt{2\sqrt{5}-10})\sqrt[4]{4}$.
11. $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ и $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$. $\sqrt{\frac{3}{2}}$. 12. $\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} - \sqrt{-1} \sin \frac{\pi}{12} \right)$, $\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} - \sqrt{-1} \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ и $\sqrt{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} - \sqrt{-1} \sin \frac{17\pi}{12} \right)$.
13. $\sqrt[3]{3}$, $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$. $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{2}$ и $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.
14. $\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$. 15. $S = 29^\circ 26' 58''$ съ точн. до $1''$.
16. $\sin 5^\circ = 0,0871557$; $\cos 10^\circ = 0,9848078$. 18. $\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin \alpha}$. 19. $\frac{\sin 2n\alpha}{2 \sin \alpha}$.
20. $\sin \left\{ \alpha + \frac{(n-1)(\beta + \pi)}{2} \right\} \sin \frac{n(\beta + \pi)}{2}$; $\sin \frac{\beta + \pi}{2}$.
21. $\cos \left\{ \alpha + \frac{(n-1)(\beta + \pi)}{2} \right\} \sin \frac{n(\beta + \pi)}{2}$; $\sin \frac{\beta + \pi}{2}$.
22. Въ 20 зад. положите $\beta = \alpha$. 23. Въ 20 зад. положите $\beta = 2\alpha$.
24. Въ 21 зад. положите $\beta = \alpha$. 25. Въ 21 зад. положите $\beta = 2\alpha$.
26. $\cos \alpha [\operatorname{tg}(n+1)\alpha - \operatorname{tg} \alpha]$. 27. $\frac{1}{2} \left[n - \frac{\cos(n+1)\alpha \sin n\alpha}{\sin \alpha} \right]$.
28. $\frac{1}{2} \left[n - \frac{\sin 4n\alpha}{2 \sin 2\alpha} \right]$. 29. $\frac{1}{2} \left[n + \frac{\cos(n+1)\alpha \sin n\alpha}{\sin \alpha} \right]$.
30. $\frac{1}{2} \left[n + \frac{\sin 4n\alpha}{2 \sin 2\alpha} \right]$. 31. $\sin^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$.
32. $\cos^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)$. 33. $\sin^4 \alpha = \frac{1}{4} (1 - 2 \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha)$.
34. $\cos^4 \alpha = \frac{1}{4} (1 + 2 \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha)$.
35. $\cos \alpha \cos (\alpha + S) = \frac{1}{2} (\cos 2\alpha \cos S - \sin 2\alpha \sin S + \cos S)$;
 $s = \frac{n}{2} \cos S + \frac{\cos (2\alpha + nS) \sin nS}{2 \sin S}$. 36. $\frac{\sin (2n+1)\alpha \sin n\alpha}{2 \sin \alpha} + \frac{n \sin n\alpha}{2}$.
37. $\frac{n}{2} \cos \alpha - \frac{\cos (n+2)\alpha \sin n\alpha}{2 \sin \alpha}$. 38. $\frac{1}{2} (\cos 2\alpha - \cos 2^{n+1}\alpha)$.

42. $\sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} (\sin \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha)$, $s = 2^n \sin \frac{\alpha}{2^{n-1}}$ — $\frac{\sin 2\alpha}{1}$
 43. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sec \alpha = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$; $s = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2^n}$.
 44. $\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{\sin^2 \alpha}$; $s = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{2^{n-1}}{\sin^2 2^{n-1} \alpha}$
 45. $\frac{1}{\sin \alpha \sin 2\alpha} = \operatorname{cosec} \alpha (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha)$, $s = \operatorname{cosec} \alpha [\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} (n+1)\alpha]$.

46. $s = \operatorname{cose} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \left[\operatorname{tg} (n+1) \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) - \operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \right]$.
 47. $s = \frac{1}{2} (\cos \frac{\alpha}{2^{n-2}} - \cos 4\alpha)$. 48. $s = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \alpha [\operatorname{tg} (n+1)\alpha - \operatorname{tg} \alpha]$.

49. $\frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2} \left\{ \sec \frac{2n+1}{2} \alpha - \sec \frac{\alpha}{2} \right\}$ 50. $\frac{1}{2} \left\{ \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - 3^n \operatorname{ctg} \frac{3^n \alpha}{2} \right\}$.

51. $\cos \alpha - \sin \alpha \operatorname{ctg} 2^n \alpha$. 52. $OB \cdot \sin \frac{(n+1)\alpha}{4n} \sin \frac{\alpha}{2} : \sin \frac{\alpha}{2n}$ 53. $2nr^2$.

54. $3nr^2$. 55. $2R \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}}$. 56. $16\pi R^2 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \left\{ \frac{n}{4} \sin^2 \frac{\pi}{2n} + \frac{n-4}{8} \right\}$.

- Отдѣлъ XIII. 1. 30° 2. 30° 3. 135° 4. 135° 5. 71°26'21",39
 6. 26°6'17",98. 7. 63°26'5",82. 8. 43°21'37",01. 9. 13°40'39",41
 10. 18°23'22",97. 11. 9,480615. 12. 1,468341. 13. 0,7387381.
 14. 0,7079469. 15. 29°51'25",7. 16. 18°38'17",64. 17. 0,4795858.
 18. 41°41'56",53. 19. 5,185695. 20. 45°42'50",17. 21. 1,517932.
 22. 0,507266. 23. 5,684566. 24. 45°4'30",79. 25. 0,8066739. 26. 0,7121141.
 27. 1. 28. ∞. 29. $\frac{1}{2457}$. 53. $r^2 = \frac{2}{17} (5-2\sqrt{2})$. 54. $r = 0$ и $\frac{1}{2}$

55. $x = \frac{a+b}{1-ab}$. 56. $x = 0, \frac{1}{2}$ и 1. 57. $x = \pm \sqrt{\frac{2}{a}}$. 58. $x = \pm \frac{1}{3}$.

59. $x = \sqrt{3}$ и $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. 60. $x = 0$ и $\pm \frac{1}{\sqrt{7}}$. 61. $x = 0$ и $\pm \frac{1}{2}$.

62. 0 и $\pm \frac{1}{2}$. 63. $x = -\frac{461}{9}$. 64. $x = \pm 1$ и $\pm (1 + \sqrt{2})$.

65. $x = a$ и $a^2 - a + 1$. 67. $x = 2$ и $y = 1$.

68. $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} \left(1 + \frac{2}{n} \right)$. 69. $\frac{\pi}{4} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{n+1}$. 70. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} nx$.



ДЛИНЫ ХОРДЪ ПРИ РАДИУСЪ = 1000.

Углы	0'	5'	10'	15'	20'	25'	30'	35'	40'	45'	50'	55'
0°	0	2	3	4	6	7	9	10	12	13	14	16
1	17	19	20	22	23	25	26	28	29	30	32	33
2	35	36	38	39	41	42	44	45	46	48	49	51
3	52	54	55	57	58	60	61	62	64	65	67	68
4	70	71	73	74	76	77	78	80	81	83	84	86
5	87	89	90	92	93	94	96	97	99	100	102	103
6	105	106	108	109	110	112	113	115	116	118	119	121
7	122	123	125	126	128	129	131	132	134	135	137	138
8	139	141	142	144	145	147	148	150	151	153	154	155
9	157	158	160	161	163	164	166	167	168	170	171	173
10	174	176	177	179	180	182	183	184	186	187	189	190
11	192	193	195	196	197	199	200	202	203	205	206	208
12	209	210	212	213	215	216	218	219	221	222	223	225
13	226	228	229	231	232	233	235	236	238	239	241	242
14	244	245	247	248	249	251	252	254	255	257	258	260
15	261	262	264	265	267	269	270	271	273	274	275	277
16	278	280	281	283	284	285	287	288	290	291	293	294
17	296	297	298	300	301	303	304	306	307	309	310	311
18	313	314	316	317	319	320	321	323	324	326	327	329
19	330	331	333	334	336	337	339	340	342	343	344	346
20	347	349	350	352	353	354	356	357	359	360	362	363
21	364	366	367	369	370	372	373	374	376	377	379	380
22	382	383	384	386	387	389	390	392	393	394	396	397
23	399	400	402	403	404	406	407	409	410	412	413	414
24	416	417	419	420	421	423	424	426	427	429	430	431
25	433	434	436	437	439	440	441	443	444	446	447	448
26	450	451	453	454	456	457	458	460	461	463	464	465
27	467	468	470	471	473	474	475	477	478	480	481	482
28	484	485	487	488	489	491	492	494	495	496	498	499
29	501	502	504	505	506	508	509	511	512	513	515	516
30	518	519	520	522	523	525	526	527	529	530	532	533
31	534	536	537	539	540	541	543	544	546	547	548	550
32	551	553	554	555	557	558	560	561	562	564	565	567
33	568	569	571	572	574	575	576	578	579	581	582	583
34	584	586	587	589	590	592	593	594	596	597	599	600
35	601	603	604	606	607	608	610	611	612	614	615	617
36	618	619	621	622	624	625	626	628	629	630	632	633
37	635	636	637	639	640	641	643	644	646	647	648	650
38	651	652	654	655	657	658	659	661	662	663	665	666
39	668	669	670	672	673	674	676	677	679	680	681	683
40	684	685	687	688	689	691	692	694	695	696	698	699
41	700	702	703	704	706	707	709	710	711	713	714	715
42	717	718	719	721	722	723	725	726	728	729	730	732
43	733	734	736	737	738	740	741	743	744	745	746	748
44	749	751	752	753	755	756	757	759	760	761	763	764
Углы	0'	5'	10'	15'	20'	25'	30'	35'	40'	45'	50'	55'

ТАБЛИЦА I.

241

ДЛИНЫ ХОРДЪ ПРИ РАДИУСЪ = 1000.

Углы	0'	5'	10'	15'	20'	25'	30'	35'	40'	45'	50'	55'
45	765	767	768	769	771	772	773	775	776	777	779	780
46	781	783	784	785	787	788	789	791	793	793	795	796
47	797	799	800	801	803	804	805	807	809	809	811	812
48	813	815	816	817	819	820	821	823	824	825	827	828
49	829	831	832	833	835	836	837	839	840	841	843	844
50	845	847	848	849	850	852	853	854	856	857	858	860
51	861	862	864	865	866	868	869	870	871	873	874	876
52	877	878	879	881	882	883	885	886	887	888	890	891
53	892	894	895	896	898	899	900	901	903	904	906	907
54	908	909	911	912	913	914	916	917	918	920	921	922
55	923	925	926	927	929	930	931	932	934	935	936	938
56	939	940	941	943	944	945	947	948	949	951	952	954
57	954	956	957	958	959	961	962	963	964	966	967	968
58	970	971	972	973	975	976	977	978	980	981	982	984
59	985	986	987	989	990	991	992	994	995	996	997	999
60	1000	1001	1002	1004	1005	1006	1007	1009	1010	1011	1013	1014
61	1015	1016	1018	1019	1020	1021	1023	1024	1025	1026	1028	1029
62	1030	1031	1033	1034	1035	1036	1037	1039	1040	1041	1042	1044
63	1045	1046	1047	1049	1050	1051	1052	1054	1055	1056	1057	1059
64	1060	1061	1062	1063	1065	1066	1067	1068	1070	1071	1072	1073
65	1075	1076	1077	1078	1079	1081	1082	1083	1084	1086	1087	1088
66	1089	1090	1092	1093	1094	1095	1097	1098	1099	1100	1101	1103
67	1104	1105	1106	1107	1109	1110	1111	1112	1114	1115	1116	1117
68	1118	1120	1121	1122	1123	1124	1126	1127	1128	1129	1130	1132
69	1133	1134	1135	1136	1138	1139	1140	1142	1143	1144	1145	1146
70	1147	1148	1149	1151	1152	1153	1154	1155	1157	1158	1159	1160
71	1161	1163	1164	1165	1166	1167	1168	1170	1171	1172	1173	1174
72	1176	1177	1178	1179	1180	1181	1183	1184	1185	1186	1187	1188
73	1190	1191	1192	1193	1194	1195	1197	1198	1199	1200	1201	1202
74	1204	1205	1206	1207	1208	1209	1211	1212	1213	1214	1215	1216
75	1217	1219	1220	1221	1222	1223	1224	1226	1227	1228	1229	1230
76	1231	1232	1234	1235	1236	1237	1238	1239	1240	1242	1243	1244
77	1245	1246	1247	1248	1250	1251	1252	1253	1254	1256	1256	1257
78	1259	1260	1261	1262	1263	1264	1265	1266	1268	1269	1270	1271
79	1272	1273	1274	1275	1277	1278	1279	1280	1281	1282	1283	1284
80	1286	1287	1288	1289	1290	1291	1292	1293	1294	1294	1297	1298
81	1299	1300	1301	1302	1303	1304	1305	1307	1308	1309	1310	1311
82	1312	1313	1314	1315	1316	1318	1319	1320	1321	1322	1323	1324
83	1325	1326	1327	1328	1330	1331	1332	1333	1334	1335	1336	1337
84	1338	1339	1340	1341	1343	1344	1345	1346	1347	1348	1349	1350
85	1351	1352	1353	1354	1355	1356	1358	1359	1360	1361	1362	1363
86	1364	1365	1366	1367	1368	1369	1370	1371	1372	1373	1375	1376
87	1377	1378	1379	1380	1381	1382	1384	1384	1385	1386	1387	1388
88	1389	1390	1391	1392	1393	1394	1396	1397	1398	1399	1400	1401
89	1402	1403	1404	1405	1406	1407	1408	1409	1410	1411	1412	1413
Углы	0'	5'	10'	15'	20'	25'	30'	35'	40'	45'	50'	55'

ДЛИНЫ ТАНГЕНСОВЪ ПРИ РАДІУСѢ — 1000.

Углы	0'	5'	10'	15'	20'	25'	30'	35'	40'	45'	50'	55'
0°	0											
1	17	19	20	22	23	25	26	28	29	31	32	33
2	35	36	38	39	41	42	44	45	47	48	49	51
3	52	54	55	57	58	60	61	62	64	66	67	68
4	70	71	73	74	76	77	79	80	82	83	84	86
5	87	89	90	92	93	95	96	97	99	100	102	103
6	105	106	108	109	111	112	114	115	116	117	119	121
7	123	124	126	127	129	130	132	133	135	136	137	139
8	140	142	143	145	146	148	149	151	152	154	155	157
9	158	160	161	163	164	166	167	169	170	172	173	175
10	176	178	179	181	182	184	185	187	188	190	191	193
11	194	196	197	199	200	202	203	205	206	208	209	211
12	212	214	215	217	219	220	222	223	225	226	228	229
13	231	232	234	235	237	238	240	242	243	245	246	248
14	249	251	252	254	255	257	258	260	262	263	265	266
15	268	269	271	273	274	276	277	279	280	282	283	285
16	287	288	290	291	293	295	296	298	299	301	302	304
17	306	307	309	310	312	314	315	317	318	320	322	323
18	325	326	328	330	331	333	334	336	338	339	341	343
19	344	346	347	349	351	352	354	356	357	359	361	362
20	364	366	367	369	370	372	374	375	377	379	380	382
21	384	385	387	389	390	392	394	395	397	399	401	402
22	404	406	407	409	411	412	414	416	418	419	421	423
23	424	426	428	430	431	433	435	436	438	440	442	443
24	445	447	449	450	452	454	456	457	459	461	463	464
25	466	468	470	472	473	475	477	479	480	482	484	486
26	488	489	491	493	495	497	498	500	502	504	506	508
27	509	511	513	515	517	519	520	522	524	526	528	530
28	532	533	535	537	539	541	543	545	547	549	550	552
29	554	556	558	560	562	564	566	568	570	571	573	575
30	577	579	581	583	585	587	589	591	593	595	597	599
31	601	603	605	607	609	611	613	615	617	619	621	623
32	625	627	629	631	633	635	637	639	641	643	645	647
33	649	651	653	656	658	660	662	664	666	668	670	672
34	674	677	679	681	683	685	687	689	691	694	696	698
35	700	702	704	707	709	711	713	715	718	720	722	724
36	726	729	731	733	735	738	740	742	744	747	749	751
37	753	756	758	760	763	765	767	770	772	774	777	779
38	781	784	786	788	791	793	795	798	800	802	805	807
39	810	812	815	817	819	822	824	827	829	832	834	837
40	839	841	844	846	849	851	854	856	859	862	864	867
41	869	872	874	877	879	882	885	887	890	892	895	898
42	900	903	906	908	911	914	916	919	922	924	927	930
43	932	935	938	941	943	946	949	952	954	957	960	963
44	966	968	971	974	977	980	983	985	988	991	994	997
Углы	0'	5'	10'	15'	20'	25'	30'	35'	40'	45'	50'	55'





1.50



ВНЕШНОСТЬ УЧЕБ. ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ДЕТЕЙ ЖИВОТНОГО УЧ.